গণিত

প্রথম ভাগ

শ্রীদেবপ্রসাদ ঘোষ

Recommended by the West Bengal Board of Secondary Education as a Text-Book for Class VII.
Vide Notification No. T.B./76/7/M/47 dated 4.1.77

গণিত

[পাটীগণিত, বীজগণিত ও জ্যামিতি]

প্রথম খণ্ড

[সপ্তম শ্রেণীর পাঠ্য]

কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের ভূতপূর্ব সদস্য
অধ্যক্ষ শ্রীদেবপ্রসাদ ঘোষ এম্. এ., বি. এল.
প্রণীত

প্রান্তিক
৭৩, মহাত্মা গান্ধী রোড,
কলিকাতা-৯

প্রকাশক :
প্রান্তিক
৭৩, মহাত্মা গান্ধী রোড,
কলিকাতা-৯

প্রথম প্রকাশ : ডিসেম্বর, ১৯৭৫
পরিমার্জিত নূতন সংস্করণ, জানুয়ারী, ১৯৭৭
পুনর্মুদ্রণ মার্চ, ১৯৭৭

মূল্য : ছয় টাকা সত্তর পয়সা মাত্র

মুদ্রাকর—
শ্রীদুলাল চন্দ্র ভূঁঞ্যা
সুদীপ প্রিন্টার্স
৪/১ এ সনাতন শীল লেন,
কলিকাতা-১২

সূচীপত্র

পাটীগণিত

বীজগণিত

জ্যামিতি

SYLLABUS IN MATHEMATICS

Class—VII

(Revised)

Arithmetic (30 Marks)

1. Revision of previous works.

2. H. C. F. and L. C. M. of vulgar fractions and decimal fractions—Application in simple problems.

3. Square root by division—Application in simple problems.

4. Application of unitary method in problms relating to time and work, simple interest (Problems should be direct)

Algebra (40 Marks)

1. The use of symbols to generalise simple arithmetical problems (Without fromally introducting equations).

2. Number system—Integrers (positive and negative).

3. Basic operations on integers.

4. Laws—Associative, Distributive etc. (use of brackets)

5. Polynomials—Addition and Subtraction, Multiplication of polynomials with two terms. Division of polynomials (Divisor being one term).

6. The following formulae and their easy applications.

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

7. Simple factors involving above formulae.

8. Solutions of simple porblems leading to simple linear equations and inequations.

9. Graphs of simple equations.

Geometry (30 Marks)

The aim is same as in class VI.

1. (i) Simple ideas of translation ard rotation by objects found in daily life—their properties.

(ii) Idea of rotational symmetry in geometrical figures like Equilateral triangle, paralleloragram, circle etc.

(iii) Composition of transformations ; congruence.

2. Constructions :—

(i) Angle congruent to a givin angle.

(ii) Constructions of triangles with given parts.

(iii) Constructions of quadrilaterals with given parts.

পাটীগণিত

প্রথম ভাগ

[সপ্তম শ্রেণীর পাঠ্য]

পাটীগণিত

সপ্তম শ্রেণী

প্রথম অধ্যায়

পূর্বপাঠের পুনরালোচনা

(i) প্রথম চারি নিয়মের বিবিধ সমাধান :

উদাহরণ 1. 2, 3 এবং 4, এই তিনটি অঙ্কের প্রত্যেকটি একবার মাত্র ব্যবহার করিলে তিন অঙ্কের যে সকল সংখ্যা উৎপন্ন হয়, তাহাদের যোগফল কত ?

3 এবং 4-কে সাজাইয়া 34 এবং 43 এই দুইটি সংখ্যা পাওয়া যায়। এখন 2কে শতকের ঘরে রাখিলে 234 এবং 243 এই দুইটি সংখ্যা পাওয়া যায়। অনুরূপভাবে 3কে শতকের ঘরে রাখিয়া দুইটি সংখ্যা এবং 4কে শতকের ঘরে রাখিয়া দুইটি সংখ্যা পাওয়া যায়। সুতরাং 2, 3 এবং 4 দ্বারা তিন অঙ্কের মোট 6টি সংখ্যা পাওয়া যাইবে। এই 6টি সংখ্যার শতক, দশক এবং একক—এই তিনটি ঘরের প্রত্যেকটিতে 2টি 2, 2টি 3 এবং 2টি 4 থাকিবে। অতএব প্রত্যেক ঘরের অঙ্কগুলির যোগফল হইবে—

$$2\times2+2\times3+2\times4=4+6+8=18$$

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $=18$ শতক $+18$ দশক $+18$ একক

$$=1800+180+18=1998$$

উদাহরণ 2. দুইটি সংখ্যার যোগফল 136 এবং বিয়োগফল 28 ; সংখ্যা দুইটি কত ?

সংখ্যা দুইটির বিয়োগফল 28, অতএব সংখ্যা দুইটির মধ্যে বড় সংখ্যাটি ছোট সংখ্যাটি অপেক্ষা 28 বড়। ছোট সংখ্যাটি যদি 28

বেশী হইত, তাহা হইলে দুইটি সংখ্যা সমান হইত এবং উহাদের যোগফল হইত $(136+28)=164$

$\therefore$ বড় সংখ্যাটির দ্বিগুণ $=164$,

$\therefore$ বড় সংখ্যাটি $=164 \div 2=82$

আবার, বড় সংখ্যাটি যদি 28 কম হইত তাহা হইলে উহাদের যোগফল হইত $(136-28)=108$, এবং উহা ছোট সংখ্যাটির দ্বিগুণ হইত।

$\therefore$ ছোট সংখ্যাটির দ্বিগুণ $=108$,

$\therefore$ ছোট সংখ্যাটি $=108 \div 2=54$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় 82 এবং 54.

আবার দুইটি সংখ্যার যোগফল হইতে বড়টি বাদ দিলে ছোট সংখ্যাটি পাওয়া যায়।

$\therefore$ ছোট সংখ্যাটি $=136-82=54$

উদাহরণ 3. দুইটি সংখ্যাকে কোন ভাজক দ্বারা ভাগ করায় ভাগশেষ যথাক্রমে 575 এবং 425 হইল; কিন্তু সংখ্যা দুইটির যোগফলকে ঐ ভাজক দ্বারা ভাগ করায় ভাগশেষ 275 হইল। ভাজকটি কত?

ভাজক দ্বারা সংখ্যা দুইটিকে ভাগ করায় ভাগশেষ হইয়াছে যথাক্রমে 575 এবং 425; সংখ্যা দুইটিকে যোগ করিয়া ঐ ভাজক দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ হওয়ার কথা $575+425=1000$. কিন্তু ভাজকটি সংখ্যা দুইটির ভিতর যতবার যায়, সংখ্যা দুইটির যোগফলের ভিতর তাহা অপেক্ষা 1 বার অধিক যায়, সেইজন্য ভাগশেষ 1000 না হইয়া ভাগশেষ হইয়াছে 275, অর্থাৎ $(1000-275)=725$ কম হইয়াছে।

$\therefore$ নির্ণেয় ভাজক $=725$

উদাহরণ 4. A ও B-এর একত্রে 310 টাকা, B ও C-এর একত্রে 260 টাকা এবং C ও A-এর একত্রে 290 টাকা আছে। কাহার কত টাকা আছে ?

A ও B-এর আছে = 310 টাকা।
B ও C-এর আছে = 260 টাকা।
C ও A-এর আছে = 290 টাকা।

∴ A, B ও C-এর টাকার দ্বিগুণ = (310 + 260 + 290) টা.
= 860 টাকা।

∴ A, B ও C-এর টাকার সমষ্টি = 860 টাকা ÷ 2 = 430 টাকা।
∴ A এর টাকার পরিমাণ = (430 − 260) টাকা = 170 টাকা।
B " " " = (430 − 290) টাকা = 140 টাকা।
C " " " = (430 − 310) টাকা = 120 টাকা।

উদাহরণ 5. কোন্ সংখ্যাকে ক্রমান্বয়ে 4, 5 ও 7 দিয়া ভাগ করিলে ভাগশেষ যথাক্রমে, 1, 2 এবং 4 এবং শেষ ভাগফল 121 হয় ?

ভাজক = $4 \times 5 \times 7 = 140$

প্রকৃত ভাগশেষ = প্রথম ভাগশেষ + দ্বিতীয় ভাগশেষ × প্রথম ভাজক + তৃতীয় ভাগশেষ × প্রথম ভাজক × দ্বিতীয় ভাজক।

$= 1 + 2 \times 4 + 4 \times 4 \times 5 = 1 + 8 + 80 = 89$

ভাগফল = 121

∴ সংখ্যাটি = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ

$= 140 \times 121 + 89 = 16940 + 89 = 17029$

উদাহরণ 6. এক ব্যক্তি 5 দিনের আয় 7 দিনে ব্যয় করেন। তাঁহার মাসিক আয় 420 টাকা হইলে কত দিনে তাঁহার 200 টাকা জমিবে ?

লোকটির একমাসের (30 দিনের) আয় = 420 টাকা।

$\therefore$ লোকটির 5 দিনের আয় = 420 টাকা ÷ 6 = 70 টাকা।

$\therefore$,, 1 ,, ,, = 70 টাকা ÷ 5 = 14 টাকা।

,, 1 ,, ব্যয় = 70 টাকা ÷ 7 = 10 টাকা।

$\therefore$ তাঁহার প্রতিদিন জমা হয় = (14 – 10) টাকা = 4 টাকা।

$\therefore$ তাঁহার 200 টাকা জমিবে = (200 ÷ 4) দিনে

= 50 দিনে।

উদাহরণ 7. একটি বাক্সে সমান সংখ্যক টাকা, 50 পয়সা, 25 পয়সা, এবং 10 পয়সার মোট 296 টাকা মূল্যের মুদ্রা আছে। মোট মুদ্রাসংখ্যা কত ?

বাক্সটিতে টাকা, 50 পয়সা, 25 পয়সা এবং 10 পয়সা মোট 4 প্রকারের মুদ্রা আছে।

প্রতিটি মুদ্রা 1টি করিয়া থাকিলে মুদ্রাগুলির মূল্য হয় = 100 প. + 50 প. + 25 প. + 10 প. = 185 পয়সা।

$\therefore$ প্রত্যেক প্রকারের মুদ্রার সংখ্যা = (29600 ÷ 185) টি

= 160 টি।

$\therefore$ মোট মুদ্রাসংখ্যা = (160 × 4) টি = 640 টি।

উদাহরণ 8. প্রত্যেক বালককে 50 পয়সা এবং প্রত্যেক বালিকাকে 25 পয়সা করিয়া দেওয়ায় 80 জন বালক-বালিকাকে দিতে 35 টাকা লাগিল। বালকের সংখ্যা কত ?

80 জন বালক-বালিকার প্রত্যেককে 25 পয়সা করিয়া দিলে

মোট ব্যয় হয় $= 25$ প. $\times 80 = 20$ টাকা এবং বালিকারা তাহাদের প্রাপ্য অংশ পায়।

সুতরাং বাকি $(35 - 20)$ টাকা বা 15 টাকা, যাহা কেবল বালকেরা পাইবে এবং তাহারা প্রত্যেকে আরও $(50$ প. $- 25$ প.$) = 25$ পয়সা করিয়া পাইবে।

$\therefore$ বালকের সংখ্যা $= (15$ টা. $\div 25$ প.$) = 60$ জন।

উদাহরণ 9. ক, খ ও গ-কে 25 টাকা এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন ক অপেক্ষা খ 2 টাকা 50 পয়সা কম পায় এবং খ অপেক্ষা গ 1 টাকা 20 পয়সা বেশী পায়।

খ সর্বাপেক্ষা কম অংশ পাইবে এবং খ অপেক্ষা গ 1 টাকা 20 পয়সা এবং ক 2 টাকা 50 পয়সা অধিক পাইবে।

অতএব, 25 টাকার মধ্যে ক ও গ এর অতিরিক্ত প্রাপ্য

$= ($ 2 টাকা 50 পয়সা $+$ 1 টাকা 20 পয়সা $)$

$=$ 3 টাকা 70 পয়সা।

অবশিষ্ট $($25 টাকা $-$ 3 টাকা 70 পয়সা$) =$ 21 টাকা 30 পয়সা তিন জনে সমান ভাবে পাইবে।

$\therefore$ খ পাইবে $=$ 21 টাকা 30 পয়সা $\div 3 =$ 7 টাকা 10 পয়সা

ক পাইবে $=$ 7 টাকা 10 পয়সা $+$ 2 টাকা 50 পয়সা

$=$ 9 টাকা 60 পয়সা।

গ পাইবে $=$ 7 টাকা 10 পয়সা $+$ 1 টাকা 20 পয়সা

$=$ 8 টাকা 30 পয়সা।

উদাহরণ 10. পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের সমষ্টি 80 বৎসর। 10 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 3 গুণ ছিল। বর্তমানে কাহার বয়স কত?

10 বৎসর পূর্বে পুত্রের বয়স 1 গুণ হইলে পিতার বয়স ছিল তার 3 গুণ।

10 বৎসর পূর্বে পিতা ও পুত্রের মোট বয়স ছিল

$= (80 - 10 \times 2)$ বৎসর $= 60$ বৎসর।

$\therefore$ 10 বৎসর পূর্বে পুত্রের বয়স ছিল $= 60$ বৎসর $\div 4$

$= 15$ বৎসর

10 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স ছিল $= 15$ বৎসর $\times 3$

$= 45$ বৎসর।

$\therefore$ পিতার বর্তমান বয়স $= (45 + 10)$ বৎসর

$= 55$ বৎসর।

পুত্রের বর্তমান বয়স $= (15 + 10)$ বৎসর

$= 25$ বৎসর।

প্রশ্নমালা 1

1. 2, 3, 4 ও 5 এই চারিটি অঙ্কের প্রত্যেকটি একবার মাত্র ব্যবহার করিয়া চারি অঙ্কের যে সকল সংখ্যা গঠিত হয়, তাহাদের যোগফল কত ?

2. তিনটি ক্রমিক সংখ্যার সমষ্টি 249 হইলে সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

3. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 32459 এবং অন্তর 2637 হইলে সংখ্যা দুইটি কত ? [C. U. 1928]

4. একটি ভাগে ভাজক ভাগফলের 25 গুণ এবং ভাগশেষের 15 গুণ। ভাগশেষ যদি 375 হয়, তবে ভাজ্য কত ? [C.U. 1929]

5. 8750-কে 635 দিয়া গুণ করিতে গিয়া কোন বালক গুণকের একটি অঙ্ক ভুল লিখিয়া 5993750 গুণফল পাইল। সে লিখিতে কি ভুল করিয়াছিল ? [C. U. 1949]

6. 7865321-কে 254 দ্বারা ভাগ করিতে গিয়া এক বালক ভাজকের একটি অঙ্ক লিখিতে ভুল করায় ভাগফল 33612 এবং ভাগশেষ 113 পাইল। বালকটি কি ভুল করিয়াছিল ?
[C. U. 1936]

7. একটি সংখ্যা হইতে 3 বিয়োগ করিয়া বিয়োগফলকে 6 দিয়া গুণকরা হইল এবং গুণফলের সহিত 8 যোগ করিয়া যোগফলকে 9 দ্বারা ভাগকরা হইল। ইহাতে ভাগফল 10 এবং ভাগশেষ 2 হইল। সংখ্যাটি কত ?

8. 240কে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন, প্রথম অংশের 3 গুণের সহিত দ্বিতীয় অংশের 5 গুণ যোগ করিলে যোগফল 950 হয়।

9. দুইটি সংখ্যাকে কোন ভাজক দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ যথাক্রমে 230 ও 325 থাকে। কিন্তু সংখ্যা দুইটির সমষ্টিকে ঐ ভাজক দ্বারা ভাগ করিলে 155 ভাগশেষ থাকে। ভাজকটি কত ?

10. এক ক্রিকেট খেলায় A, B ও C একত্রে 108 রান করিল। A ও B একত্রে 90 রান এবং A ও C একত্রে 51 রান করিল। খেলায় কে কত রান করিয়াছিল ?

11. একটি গরু ও একটি ছাগলের মূল্য একত্রে 580 টাকা, একটি গরু ও একটি ঘোড়ার মূল্য একত্রে 980 টাকা এবং একটি ঘোড়া ও একটি ছাগলের মূল্য একত্রে 680 টাকা হইলে একটি গরুর মূল্য কত ?

12. একটি সংখ্যাকে ধারাবাহিক ভাবে 5, 6 ও 11 দ্বারা ভাগ করিলে যথাক্রমে 2, 3 ও 4 ভাগশেষ থাকে। সংখ্যাটিকে 330 দ্বারা ভাগ করিলে কত ভাগশেষ থাকিবে ?

13. কোন্ সংখ্যাকে ক্রমান্বয়ে 3, 5 ও 7 দ্বারা ভাগ করিলে যথাক্রমে 1, 3 ও 4 ভাগশেষ এবং শেষ ভাগফল 80 হয় ?

14. এক ব্যক্তি 3 মাসের আয় 4 মাসে ব্যয় করেন। তাঁহার বার্ষিক আয় 5040 টাকা হইলে এক বৎসরে তাঁহার কত জমিবে ?

15. প্রতি বৎসর 3600 টাকা করিয়া খরচ করায় 6 বৎসরে এক ব্যক্তির কিছু ঋণ হইল ; পরে প্রতি বৎসর 3120 টাকা করিয়া খরচ করায় 10 বৎসরে সেই ঋণ পরিশোধ হইল। লোকটির বার্ষিক আয় কত ?

16. 6 টাকা 80 পয়সা কিলোগ্রাম্ দরের 25 কি. গ্রা. তৈলের বিনিময়ে 10 কি. গ্রা. ঘৃত পাওয়া গেল। প্রতি কি. গ্রা. ঘৃতের মূল্য কত ?

17. 1 টাকা 40 পয়সা কিলোগ্রাম দরের 120 কিলোগ্রাম গমের সহিত 2 টাকা 30 পয়সা কিলোগ্রাম দরের 10 কিলোগ্রাম চাউল ও 25 মিটার কাপড় বিনিময় করা যায়। 1 মিটার কাপড়ের মূল্য কত ?

18. একটি বাক্সে যত টাকা আছে, তাহার 3 গুণ 50 পয়সা, 5 গুণ 25 পয়সা, এবং 6 গুণ 10 পয়সার মূল্যের মুদ্রা আছে। বাক্সটিতে যদি চারি প্রকারের মোট 870 টাকা মূল্যের মুদ্রা থাকে, তবে মোট মুদ্রাসংখ্যা কত ?

19. একব্যক্তি একখানি একশত টাকার নোট ভাঙ্গাইয়া দুই টাকা ও পাঁচ টাকার মোট 38 খানি নোট পাইল। সে পাঁচ টাকার নোট মোট কয়খানি পাইল ?

20. 120 জন বালক-বালিকাকে 74 টাকা এরূপে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল যে, প্রত্যেক বালক 75 পয়সা ও প্রত্যেক বালিকা 50 পয়সা পাইল। বালিকার সংখ্যা কত ?

21. আমার নিকট যত টাকা আছে তাহা কতিপয় বালককে ভাগ করিয়া দিতে গিয়া দেখা গেল যে, প্রত্যেক বালককে 60 পয়সা করিয়া দিলে আমার নিকট 2 টাকা 40 পয়সা উদ্বৃত্ত থাকে কিন্তু প্রত্যেক বালককে 70 পয়সা করিয়া দিলে আমার 7 টাকা 20 পয়সা অকুলান হয়। আমার নিকট কত টাকা আছে এবং বালকের সংখ্যা কত ?

22. ক, খ ও গ-কে 573 টাকা এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন খ, গ এর দ্বিগুণ অপেক্ষা 5 টাকা এবং ক, খ এর তিন গুণ অপেক্ষা 4 টাকা বেশী পায়।

23. 5 জন পুরুষ, 5 জন স্ত্রীলোক ও 5 জন বালকের মধ্যে 438 টাকা 50 পয়সা এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন প্রত্যেক স্ত্রীলোক প্রত্যেক বালকের 2 গুণ অপেক্ষা 1 টাকা 20 পয়সা অধিক পায় এবং প্রত্যেক পুরুষ প্রত্যেক বালকের 3 গুণ অপেক্ষা 2 টাকা 50 পয়সা অধিক পায়।

24. বর্তমানে পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি 68 বৎসর। 10 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 3 গুণ ছিল। এখন কাহার বয়স কত ?

25. 8 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে। বর্তমানে পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি 80 বৎসর হইলে, কাহার বয়স কত ?

পূর্বপাঠের পুনরালোচনা :

(ii) **গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. সম্বন্ধীয় বিবিধ সমাধান :**

কতিপয় জ্ঞাতব্য বিষয় :

(1) যে সংখ্যা প্রদত্ত দুই বা ততোধিক সংখ্যার প্রত্যেকটির গুণনীয়ক, উহাকে তাহাদের সাধারণ গুণনীয়ক বলে।

(2) কয়েকটি প্রদত্ত সংখ্যার কতকগুলি সাধারণ গুণনীয়ক থাকিতে পারে, তন্মধ্যে যেটি সর্বাপেক্ষা বড় তাহাকে উহাদের গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক বা গ. সা. গু. (Greatest Common Measure বা G.C.M. বা Highest Common Factor বা H.C.F.) বলে।

যথা : 24 এর গুণনীয়ক 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
36 „ „ 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
24 ও 36-এর সাধারণ গুণনীয়ক 2, 3, 4, 6, 12
তন্মধ্যে 12 সর্বাপেক্ষা বড়।
∴ 24 ও 36-এর গ. সা. গু. = 12

(3) যে সংখ্যা কয়েকটি প্রদত্ত সংখ্যার প্রত্যেকটি দ্বারা বিভাজ্য তাহাকে উহাদের সাধারণ গুণিতক বলে।

(4) যে ক্ষুদ্রতম সংখ্যা কয়েকটি প্রদত্ত সংখ্যার প্রত্যেকটি দ্বারা বিভাজ্য, তাহাকে উহাদের লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক বা ল. সা. গু. (Lowest Common Multiple বা L.C.M.) বলে।

যথা : 4 এর গুণিতক 4, 8, 12, 16, 20, 24......
6 „ „ 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42......
4 ও 6 এর সাধারণ গুণিতক : 12, 24......
ইহাদের মধ্যে 12 সর্বাপেক্ষা ছোট।
∴ 4 ও 6 এর ল. সা. গু. = 12

(5) দুইটি সংখ্যার গুণফল = উহাদের ল. সা. গু. × গ. সা. গু.

(6) দুইটি সংখ্যার গুণফলকে উহাদের গ. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিলে ল. সা. গু. পাওয়া যায় এবং ল. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিলে গ. সা. গু. পাওয়া যায়।

(7) দুইটি সংখ্যার প্রত্যেকটি অপর একটি সংখ্যাদ্বারা বিভাজ্য হইলে, প্রথমোক্ত সংখ্যা দুইটির সমষ্টি ও অন্তর শেষোক্ত সংখ্যাটি দ্বারা বিভাজ্য হইবে। 10 এবং 18; 2 দ্বারা বিভাজ্য; 10 ও 18 এর সমষ্টি 28 এবং অন্তর 8; ইহারাও 2 দ্বারা বিভাজ্য।

(8) যে সংখ্যা দুই বা ততোধিক পরস্পর মৌলিক সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য, সংখ্যাটি তাহাদের গুণফল দ্বারাও বিভাজ্য। যথা:

2 এবং 3 দ্বারা 18 বিভাজ্য; সুতরাং 2 এবং 3 এর গুণফল 6 দ্বারাও 18 বিভাজ্য।

উদাহরণ 1. কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা দ্বারা 2115 ও 3303-কে ভাগ করিলে প্রত্যেকস্থলে 3 অবশিষ্ট থাকে?

2115 এবং 3303-কে নির্ণেয় বৃহত্তম সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে 3 অবশিষ্ট থাকে। অতএব, (2115 − 3) বা 2112 এবং (3303 − 3) বা 3300 কে ঐ সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে নিশ্চয়ই ভাগশেষ থাকিবে না।

∴ নির্ণেয় বৃহত্তম সংখ্যা = 2112 এবং 3300 এর গ.সা.গু. = 132.

উদাহরণ 2. ক্ষুদ্রতম এমন সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাকে 32, 36 ও 40 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ যথাক্রমে 22, 26 ও 30 থাকে।

$$32 - 22 = 10,\ 36 - 26 = 10,\ 40 - 30 = 10$$

অতএব, দেখা যাইতেছে যে প্রতিক্ষেত্রে ভাজক হইতে ভাগশেষ 10 কম।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষুদ্রতম সংখ্যা

= 32, 36 এবং 40 এর ল. সা. গু. − 10

= 1440 − 10 = 1430

উদাহরণ 3. পাঁচ অঙ্কের কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা এবং ছয় অঙ্কের কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা 10, 15, 20, 25 ও 30 দ্বারা বিভাজ্য ?

10, 15, 20, 25 ও 30 দ্বারা বিভাজ্য ক্ষুদ্রতম সংখ্যা

= 10, 15, 20, 25 ও 30 এর ল. সা. গু. = 300

পাঁচ অঙ্কের ক্ষুদ্রতম সংখ্যা = 10000

$$
\begin{array}{r|l}
300 & 10000 \,(33 \\
 & \underline{900} \\
 & 1000 \\
 & \underline{900} \\
 & 100
\end{array}
$$

$\therefore$ পাঁচ অঙ্কের নির্ণেয় ক্ষুদ্রতম সংখ্যা

= 10000 + (300 − 100)

= 10200

ছয় অঙ্কের বৃহত্তম সংখ্যা = 999999

$$
\begin{array}{r|l}
300 & 999999 \,(3333 \\
 & \underline{900} \\
 & 999 \\
 & \underline{900} \\
 & 999 \\
 & \underline{900} \\
 & 999 \\
 & \underline{900} \\
 & 99
\end{array}
$$

$\therefore$ ছয় অঙ্কের নির্ণেয় বৃহত্তম সংখ্যা = (999999 − 99)

= 999900

উদাহরণ 4. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 4, 5, 6 এবং 8 দ্বারা ভাগ করিলে প্রতিবারেই ভাগশেষ 2 থাকে, কিন্তু 7 দ্বারা ভাগ করিলে কোন ভাগশেষ থাকে না ?

4, 5, 6 এবং 8 দ্বারা বিভাজ্য ক্ষুদ্রতম সংখ্যা

= 4, 5, 6 এবং 8-এর ল. সা. গু. = 120

∴ নির্ণেয় সংখ্যাটি হইলে 120-এর কোন গুণিতক + 2, যাহা 7 দ্বারা বিভাজ্য।

120-কে 7 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ থাকে 1 ; এখন কমপক্ষে 1-এর যত গুণের সহিত 2 যোগ করিলে যোগফল 7 দ্বারা বিভাজ্য হয়, 120-এর তত গুণের সহিত 2 যোগ করিলে প্রাপ্য যোগফল নির্ণেয় সংখ্যা হইবে।

$1 \times 5 + 2 = 7$, (7 দ্বারা বিভাজ্য)

∴ নির্ণেয় ক্ষুদ্রতম সংখ্যা

$= 120 \times 5 + 2 = 602$

উদাহরণ 5. কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা দ্বারা 633, 758 ও 983-কে ভাগ করিলে প্রত্যেক স্থলে একই ভাগশেষ থাকিবে ?

নির্ণেয় বৃহত্তম সংখ্যা দ্বারা 633, 758 এবং 983-কে ভাগ করিলে প্রতিক্ষেত্রে একই ভাগশেষ থাকিবে। সুতরাং (983 − 758) বা 225-কে এবং (758 − 633) বা 125 কে নির্ণেয় সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে কোন ভাগশেষ থাকিবে না।

নির্ণেয় বৃহত্তম সংখ্যা

= 125 এবং 225-এর গ. সা. গু. = 25

উদাহরণ 6. দুইটি সংখ্যার যোগফল 640 এবং গ. সা. গু. 128 ; সংখ্যা দুইটি কি কি হইতে পারে ?

ধরা গেল, সংখ্যা দুইটি হইল 128 ক এবং 128 খ।

[এখানে ক ও খ পরস্পর মৌলিক]

$\therefore$ 128 ক + 128 খ = 640

বা, 128 (ক + খ) = 128 × 5

বা, ক + খ = 5

পরস্পর মৌলিক, 1 ও 4 এবং 2 ও 3—এই জোড়ার সমষ্টি = 5

এই শর্তানুসারে দুই জোড়া সংখ্যা পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় :

$$\begin{rcases} 128 \times 1 = 128 \\ 128 \times 4 = 512 \end{rcases}$$

এবং

$$\begin{rcases} 128 \times 2 = 256 \\ 128 \times 3 = 384 \end{rcases}$$

প্রশ্নমালা 2

1. সর্বাধিক কতজন বালককে 112-টি আম এবং 176-টি লিচু সমান ভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া যাইতে পারে ?

2. এক ব্যক্তি 7 টাকা 40 পয়সা এবং 9 টাকা 80 পয়সা দিয়া দুই ঝুড়ি আতা কিনিলেন। যদি প্রতিটি আতার দাম সমান হয়, তবে এক একটি আতার দাম অধিক পক্ষে কত হইতে পারে ?

3. কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা দ্বারা 1637 ও 1320 কে ভাগ করিলে ভাগশেষ যথাক্রমে 17 ও 15 থাকিবে ? [C. U. 1951]

4. এমন একটি বৃহত্তম সংখ্যা নির্ণয় কর যাহা দ্বারা 1625, 2281 ও 4218 কে ভাগ করিলে ভাগশেষ যথাক্রমে 8, 4 ও 5 থাকিবে ?

[C. U. 1930]

5. কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা দ্বারা 399, 695, 548 ও 1003 কে ভাগ করিলে ভাগশেষ যথাক্রমে 3, 2, 8 ও 4 থাকিবে ?

[C. U. 1950]

6. কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা দ্বারা 55, 127 এবং 175 কে ভাগ করিলে একই ভাগশেষ থাকিবে ? [Pat. U. 1929]

7. কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা দ্বারা 1137, 1262 ও 1487 কে ভাগ করিলে একই ভাগশেষ থাকিবে ? ভাগশেষটিই বা কত থাকিবে ?

8. এক সওদাগরের নিকট তিন প্রকারের মদ আছে, প্রথম প্রকারের 403 গ্যালন, দ্বিতীয় প্রকারের 434 গ্যালন এবং তৃতীয় প্রকারের 465 গ্যালন। সমান আকারের কমপক্ষে কতগুলি পাত্র হইলে ঐ মদ মিশ্রিত না করিয়া রাখা যাইতে পারে ?

[A. U. 1906]

9. চারিটি ঘণ্টা একসঙ্গে বাজিয়া যথাক্রমে 12, 18, 24 ও 30 সেকেণ্ড অন্তর বাজিতে লাগিল। কতক্ষণ পরে উহারা আবার একসঙ্গে বাজিবে ? [C. U. 1921)

10. একখানি গাড়ির সামনের চাকার পরিধি 1 মিটার 12 সেন্টিমিটার, এবং পিছনের চাকার পরিধি 1 মিটার 28 সেন্টিমিটার। গাড়ীখানি কমপক্ষে কতদূর গেলে সামনের চাকা পিছনের চাকা অপেক্ষা 100 বার অধিক ঘুরিবে ?

11. ক্ষুদ্রতম কোন্ সংখ্যাকে 6, 8, 12, 15 ও 20 দ্বারা ভাগ করিলে একই ভাগশেষ থাকিবে ? [Pat. U. 1918]

12. ছয় অঙ্কের কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা 3, 5, 8, 12, 15 ও 16 দ্বারা বিভাজ্য ?

13. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 48, 64, 72, 80, 120 ও 140 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ যথাক্রমে, 38, 54, 62, 70, 110 ও 130 থাকিবে ? [C. U. 1898]

14. এমন একটি ক্ষুদ্রতম সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাকে 7, 9, 14, 21 এবং 35 দিয়া ভাগ করিলে প্রত্যেকস্থলে 2 ভাগশেষ থাকে, কিন্তু 11 দিয়া ভাগ করিলে মিলিয়া যায়। [C. U. 1942]

15. পাঁচ অঙ্কের কোন্ বৃহত্তম সংখ্যার সহিত 8509 যোগ করিলে যোগফল 20, 27, 32 ও 36 দ্বারা বিভাজ্য হইবে ?

16. 1325 হইতে কোন্ ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম সংখ্যা বিয়োগ করিলে বিয়োগফলগুলি 4, 5, 6 এবং 10 দ্বারা বিভাজ্য হইবে ? [S. F. 1972]

17. দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. 373 এবং ল. সা. গু. 28721 ; সংখ্যা দুইটির গুণফল কত ?

18. দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. 32 এবং ল. সা. গু. 2464 ; একটি সংখ্যা 224 হইলে অপরটি কত ? [C. U. 1948]

19. দুইটি সংখ্যার গুণফল 12960 এবং গ. সা. গু. 36 ; সংখ্যা দুইটির ল. সা. গু. কত ?

20. দুইটি সংখ্যার যোগফল 1212 এবং গ. সা. গু. 101 ; সংখ্যা দুইটি কি কি হইতে পারে ? [C. U. 1945]

21. দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. 7 এবং গুণফল 2744 ; সংখ্যা দুইটি 7 অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে সংখ্যা দুইটি কত ? [D. B. 1948]

22. 64329 কে কোন সংখ্যা দ্বারা ভাগ করায় প্রথম, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় বা শেষ ভাগশেষ যথাক্রমে 175, 114 এবং 213 রহিল, ভাগফলটি নির্ণয় কর। [C. U. 1939]

পূর্বপাঠের পুনরালোচনা

(iii) সামান্য ভগ্নাংশ :

(1) লব ও হর দ্বারা প্রকাশিত ভগ্নাংশকে সামান্য ভগ্নাংশ বলে।

(2) যে ভগ্নাংশের লব ও হর অখণ্ড রাশি তাহাকে সরল ভগ্নাংশ বলে। যথা : $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}$ ইত্যাদি।

(3) যে ভগ্নাংশের লব, হর অপেক্ষা ছোট, তাহাকে প্রকৃত ভগ্নাংশ বলে। যথা : $\frac{4}{5}, \frac{6}{7}$ ইত্যাদি।

(4) যে ভগ্নাংশের লব, হরের সমান বা হর অপেক্ষা বড়, তাহাকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ বলে। যথা : $\frac{8}{5}, \frac{12}{5}$ ইত্যাদি।

(5) যে ভগ্নাংশে খণ্ড ও অখণ্ড সংখ্যা মিশ্রিত থাকে, তাহাকে মিশ্র সংখ্যা বা মিশ্র ভগ্নাংশ বলে। যথা : $3\frac{1}{2}, 7\frac{1}{3}$ ইত্যাদি।

(6) যে ভগ্নাংশের লব ও হর পূর্ণসংখ্যা নয়, তাহাকে জটিল ভগ্নাংশ বলে। যথা : $\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{7}}, \dfrac{1\frac{1}{5}}{6\frac{7}{8}}$ ইত্যাদি।

উদাহরণ 1. সরল কর :

$$5\tfrac{7}{8}+[8\tfrac{5}{9}-\{4\tfrac{1}{6}-(2\tfrac{2}{3}-\overline{1\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}})\}]$$

$$5\tfrac{7}{8}+[8\tfrac{5}{9}-\{4\tfrac{1}{6}-(2\tfrac{2}{3}-\overline{1\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}})\}]$$
$$=\tfrac{47}{8}+[\tfrac{77}{9}-\{\tfrac{25}{6}-(\tfrac{8}{3}-\overline{\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{3}})\}]$$
$$=\tfrac{47}{8}+[\tfrac{77}{9}-\{\tfrac{25}{6}-(\tfrac{8}{3}-\tfrac{11}{6})\}]$$
$$=\tfrac{47}{8}+[\tfrac{77}{9}-\{\tfrac{25}{6}-\tfrac{5}{6}\}]$$
$$=\tfrac{47}{8}+[\tfrac{77}{9}-\tfrac{10}{3}]=\tfrac{47}{8}+\tfrac{47}{9}=\tfrac{799}{72}=11\tfrac{7}{72}$$

উদাহরণ 2. সরল কর :

$$\frac{\frac{2}{5}(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+\frac{1}{6} \text{ এর } 2\frac{1}{4}}{\frac{5}{7}\times\frac{7}{15}\div\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\frac{2}{5}(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+\frac{1}{6} \text{ এর } 2\frac{1}{4}}{\frac{5}{7}\times\frac{7}{15}\div\frac{2}{3}}=\frac{\frac{2}{5}\times\frac{7}{12}+\frac{1}{6} \text{ এর } \frac{9}{4}}{\frac{5}{7}\times\frac{7}{15}\times\frac{3}{2}}=\frac{\frac{7}{30}+\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\frac{73}{120}}{\frac{1}{2}}=\frac{73}{120}\times\frac{2}{1}=\frac{73}{60}=1\frac{13}{60}$$

উদাহরণ 3. সরল কর : $\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{3+\dfrac{2}{4+\frac{2}{3}}}}$

$$\frac{1}{1+\dfrac{2}{3+\dfrac{2}{4+\frac{2}{3}}}}=\frac{1}{1+\dfrac{2}{3+\dfrac{2}{\frac{14}{3}}}}=\frac{1}{1+\dfrac{2}{3+\frac{3}{7}}}=\frac{1}{1+\dfrac{2}{\frac{24}{7}}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{7}{12}}=\frac{1}{\frac{19}{12}}=\frac{12}{19}$$

উদাহরণ 4. এক ব্যক্তি স্বীয় সম্পত্তির $\frac{3}{11}$ অংশ পুত্রকে দিয়া বাকি অংশ 4 কন্যাকে সমানভাবে ভাগ করিয়া দিলেন। ইহাতে প্রত্যেক কন্যা 2500 টাকা পাইল। পুত্র কত টাকা পাইল ?

পুত্র পায় সম্পত্তির $\frac{3}{11}$ অংশ। বাকি থাকে $1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$ অংশ

$\therefore$ প্রত্যেক কন্যা পায় $=\frac{8}{11}\div 4=\frac{2}{11}$ অংশ

$\frac{2}{11}$ অংশের মূল্য $=2500$ টাকা

$\therefore$ সমস্ত সম্পত্তির মূল্য $=2500$ টাকা $\div\frac{2}{11}=13750$ টাকা।

$\therefore$ পুত্র পায় $=13750$ টাকা $\times\frac{3}{11}=3750$ টাকা।

উদাহরণ 5. $\frac{4}{5}$ অংশ জলপূর্ণ একটি বালতির ওজন 12 কি. গ্রা. এবং $\frac{7}{10}$ অংশ জলপূর্ণ থাকিলে ঐ বালতির ওজন হয় 11 কি. গ্রা.। শূন্য বালতির ওজন কত ?

বালতির ওজন + উহার $\frac{4}{5}$ অংশ পূর্ণ জলের ওজন = 12 কি.গ্রা.

বালতির ওজন + „ $\frac{7}{10}$ „ „ „ „ = 11 কি.গ্রা.

(বিয়োগ করিয়া) $\therefore$ বালতির $(\frac{4}{5}-\frac{7}{10})$ অংশ বা $\frac{1}{10}$ অংশ জলের ওজন = 1 কি.গ্রা.।

$\therefore$ বালতির $\frac{7}{10}$ অংশ জলের ওজন = 7 কি.গ্রা.।

$\therefore$ বালতির ওজন = (11 − 7) কি.গ্রা = 4 কি.গ্রা.।

প্রশ্নমালা 3

সরল কর :

1. $\frac{5}{6}$ এর $\frac{3}{4}+\frac{7}{8}\div 3\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{2}$

2. $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})\div(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})$

3. $2\frac{9}{20}-[6\frac{1}{4}-\{5\frac{1}{2}-(2\frac{1}{5}-1\frac{1}{2})\}]$

4. $\dfrac{6\frac{7}{8}+3\frac{4}{5}}{6\frac{7}{8}-3\frac{4}{5}}\div\frac{1}{3}$ এর $10\frac{17}{41}$

5. $\dfrac{2\frac{2}{3}+5\frac{7}{9}}{1\frac{1}{2}-\frac{4}{9}}\div\dfrac{3\frac{1}{2}}{4}$ এর $\frac{5}{8}+\dfrac{2\frac{3}{16}}{32}$ [C. U. 1922]

6. $\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\div\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}$ [C. U. 1869]

7. $\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{2}{9}}{4-5\frac{1}{2}\text{ এর }\frac{5}{9}}\div\dfrac{\frac{3}{5}+\frac{1}{4}}{4\frac{1}{2}\text{ এর }\frac{7}{10}-2\frac{1}{2}}$ [C. U. 1876]

8. $\dfrac{2\frac{1}{4}}{2\frac{2}{3}}+\dfrac{2\frac{1}{2}+5\frac{1}{5}}{3\frac{1}{3}+9\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}$ এর $\frac{8}{20}$ [C. U. 1864]

9. $\dfrac{1\frac{1}{4}-\frac{5}{12}}{1\frac{1}{4}+\frac{5}{12}}+\dfrac{9\times5}{14\times3}$ এর $\frac{7}{8}-\dfrac{11\frac{1}{4}}{15}$ [D. U. 1935]

10. $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}+\frac{7}{8}}\times\dfrac{3\frac{7}{8}-1\frac{1}{4}}{\frac{5}{7}\times\frac{7}{8}\div\frac{7}{9}}\div1\frac{8}{41}$

11. $\dfrac{(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}) \text{ এর } (\frac{3}{4}-\frac{2}{3})\div\frac{5}{28}}{(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}) \text{ এর } (\frac{5}{6}+\frac{1}{5}) \text{ এর } \frac{30}{31}}$

12. $\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{1+\dfrac{3}{1+\frac{1}{4}}}}$ 13. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{1+\frac{4}{3}}}}$

14. $8-8\times\dfrac{2\frac{1}{5}-1\frac{2}{7}}{2-\dfrac{1}{6-\frac{1}{6}}}$ [C. U. 1879]

15. $\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}}\times\dfrac{3}{\frac{5}{8} \text{ এর } \frac{3}{2}\div1\frac{1}{4}}$ [C. U. 1940]

16. $\dfrac{10\frac{3}{8}-(5\frac{3}{5}+4\frac{9}{20})}{10\frac{1}{8}-(2\frac{1}{5}-\frac{4}{15})-7}\div\dfrac{1}{6+\dfrac{1}{1+\frac{1}{8}}}$ [C. U. 1909]

17. কোন্ সংখ্যা হইতে $12\frac{4}{5}$ বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $2\frac{1}{2}$ অপেক্ষা $\frac{7}{10}$ অধিক হয়?

18. কোন্ সংখ্যার সহিত উহার $\frac{1}{3}$ যোগ করিলে 54 হয়?

19. কত টাকার $\frac{4}{5}$ এর $\frac{5}{8}$ খরচ করিলে 75 টাকা থাকে?

20. যদুর নিকট যত টাকা আছে, মধুর তাহার $\frac{1}{12}$ এর 7 গুণ টাকা আছে। মধুর নিকট 56 টাকা থাকিলে যদুর নিকট কত টাকা আছে?

21. কোন্ সংখ্যার $\frac{1}{3}$ উহার $\frac{1}{4}$ অপেক্ষা 5 অধিক?

22. একটি খুঁটির $\frac{1}{2}$ কাদায়, $\frac{1}{3}$ জলে এবং বাকি 4 মিটার জলের উপরে আছে। খুঁটিটি কত লম্বা ?

23. এক ব্যক্তি মোট ভ্রমণপথের $\frac{3}{7}$ নৌকায়, $\frac{2}{5}$ ট্রেনে এবং বাকি 12 মাইল হাঁটিয়া গেল। সে মোট কত মাইল ভ্রমণ করিল ?

24. A, B ও C তিন জনে কিছু টাকা এরূপে ভাগ করিয়া লইল যে A সমস্ত টাকার $\frac{1}{4}$, B অবশিষ্টের $\frac{8}{15}$ এবং C 77 টাকা পাইল। A কত টাকা পাইল ?

25. A, B ও C তিনজন পথিক একস্থানে মিলিত হইল। A-এর নিকট 9 খানা এবং B-এর নিকট 7 খানা রুটি ছিল। তিনজনে রুটিগুলি সমান ভাবে ভাগ করিয়া খাইল। যাবার সময় C, 1 টাকা 60 পয়সা দিয়া গেল। এই পয়সা A ও B কিরূপে ভাগ করিয়া লইবে ?

26. পাঁচ ভ্রাতা একত্রে একটি ঋণ পরিশোধ করিল। জ্যেষ্ঠ ভ্রাতা সমুদায় ঋণের $\frac{1}{3}$ এবং অপর ভ্রাতাগণ বাকি ঋণ সমান অংশে পরিশোধ করিল। ইহাতে জ্যেষ্ঠ ভ্রাতা অপেক্ষা অপর ভ্রাতাদের প্রত্যেককে 840 টাকা কম দিতে হইল। মোট ঋণের পরিমাণ কত ? [S. F. 1956]

27. এক ব্যক্তি মৃত্যুকালে আপন সম্পত্তির $\frac{1}{3}$ স্ত্রীকে, অবশিষ্টের $\frac{3}{5}$ পুত্রকে দিয়া অবশিষ্ট সম্পত্তি 3 কন্যাকে সমানভাবে ভাগ করিয়া দিলেন। পুত্রের অংশ এক কন্যার অংশ অপেক্ষা 2100 টাকা অধিক হইলে স্ত্রী কত কত পাইল ?

28. একটি চৌবাচ্চার $\frac{3}{4}$ অংশ জলে পূর্ণ ছিল। 16 গ্যালন জল তুলিয়া লওয়ায় উহার অর্ধাংশ জলে পূর্ণ থাকিবার পরও উহাতে আরও 25 গ্যালন জল রহিল। চৌবাচ্চাটিতে কত জল ধরে ?

29. জলপূর্ণ একটি পাত্রের ওজন 12 কি.গ্রা. 650 গ্রাম ; কিন্তু পাত্রটির $\frac{7}{12}$ অংশ যখন জলে পূর্ণ থাকে, তখন উহার ওজন হয় 8 কি.গ্রা. 150 গ্রাম। জলশূন্য পাত্রের ওজন কত ?

30. এক ব্যক্তি স্থির করিলেন, তাঁহার আয়ের $\frac{1}{2}$ ব্যয় করিবেন, $\frac{1}{3}$ সঞ্চয় করিবেন এবং $\frac{1}{4}$ কারবারে খাটাইবেন। এরূপ ভাগ করিতে গিয়া তিনি দেখিলেন যে তাঁহার 65 টাকা অকুলান হয়। অকুলান হইবাব কারণ কি ? তাঁহার আয় কত ছিল ?

পূর্বপাঠের পুনরালোচনা

(iv) দশমিক ভগ্নাংশ :

উদাহরণ 1. 7·625-এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল 9·1 হইবে ?

নির্ণেয় দশমিক সংখ্যাটি যোগ করিতে হইবে $= 9{\cdot}1 - 7{\cdot}625 = 1{\cdot}475$

উদাহরণ 2. কোন্ সংখ্যাকে 13·5 দ্বারা গুণ করিলে গুণফল 24·03 এবং 1·25 এর গুণফলের সমান হইবে ?

নির্ণেয় সংখ্যাটি $= \dfrac{24{\cdot}03 \times 1{\cdot}25}{13{\cdot}5} = \dfrac{30{\cdot}0375}{13{\cdot}5} = 2{\cdot}225$

উদাহরণ 3. সরল কর : $2{\cdot}56 \times {\cdot}05 + 1{\cdot}25 \div 2{\cdot}5 - 7{\cdot}4 \times {\cdot}003$

$$2{\cdot}56 \times {\cdot}05 + 1{\cdot}25 \div 2{\cdot}5 - 7{\cdot}4 \times {\cdot}003$$
$$= {\cdot}128 + {\cdot}5 - {\cdot}0222$$
$$= {\cdot}628 - {\cdot}0222 = {\cdot}6058$$

উদাহরণ 4. সরল কর : $\dfrac{6{\cdot}12 \times 3{\cdot}5}{6{\cdot}8 - 2{\cdot}3} + \dfrac{2{\cdot}7 \times 6}{1{\cdot}2}$

$$\frac{6{\cdot}12 \times 3{\cdot}5}{6{\cdot}8 - 2{\cdot}3} + \frac{2{\cdot}7 \times 6}{1{\cdot}2} = \frac{21{\cdot}42}{4{\cdot}5} + \frac{16{\cdot}2}{1{\cdot}2}$$
$$= 4{\cdot}76 + 13{\cdot}5 = 18{\cdot}26$$

প্রশ্নমালা 4

1. দুইটি সংখ্যার যোগফল 512·34 এবং উহাদের একটি সংখ্যা 305·1257 হইলে অপরটি কত ?

2. কত হইতে 15·375 বিয়োগ করিলে 18·925 হয় ?

3. 114·72-এর সহিত কত যোগ করিলে 317·025 হয় ?

4. এক বালক একখানি পুস্তকের ·17 অংশ প্রথম দিন, ·27 অংশ দ্বিতীয় দিন এবং ·375 অংশ তৃতীয় দিন পড়িল। পুস্তকখানির কত অংশ পড়িতে বাকি রহিল ?

5. 28·543 কে 12 বার লইয়া যোগ করিলে কত হইবে ?

6. ভাজক 7·123, ভাগফল 2·05 এবং ভাগশেষ ·345 ; ভাজ্য কত ?

7. একটি চাকার পরিধি 7·7 মিটার। 5·1975 কিলোমিটার পথ যাইতে চাকাটি কতবার ঘুরিবে ?

8. দুইটি সংখ্যার যোগফল 27·44 এবং বিয়োগফল 2·8 হইলে সংখ্যা দুইটির গুণফল কত ?

9. পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের সমষ্টি 43 বৎসর ; 2·5 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 3 গুণ হইবে। বর্তমানে কাহার বয়স কত ?

10. এক ব্যক্তি স্বীয় সম্পত্তির ·46 অংশ পুত্রকে, ·25 অংশ কন্যাকে এবং ·15 অংশ স্ত্রীকে দিয়া অবশিষ্ট সম্পত্তি 28000 টাকায় বিক্রয় করিলেন। তাঁহার সম্পত্তির মোট মূল্য কত ?

সরল কর ঃ

11. $7{\cdot}6-[6{\cdot}5-\{5{\cdot}4-(4{\cdot}3-\overline{3{\cdot}2-2{\cdot}1})\}]$

12. $({\cdot}1701 \div 16{\cdot}2) \div ({\cdot}005 \div {\cdot}07)$ [C. U. 1917]

13. $(1{\cdot}4-{\cdot}33)\div({\cdot}31+{\cdot}123-{\cdot}005)$ [C.U. 1918]

14. $\dfrac{({\cdot}0104-{\cdot}002) \text{ এর } {\cdot}12+{\cdot}36\times{\cdot}002}{{\cdot}12\times{\cdot}12}$ [M.E.1923]

15. $\dfrac{1{\cdot}59\times15{\cdot}9-{\cdot}41\times4{\cdot}1}{15{\cdot}9-4{\cdot}1}$

16. $\dfrac{{\cdot}64\times{\cdot}64\times{\cdot}64+{\cdot}36\times{\cdot}36\times{\cdot}36}{{\cdot}64\times{\cdot}64-{\cdot}64\times{\cdot}36+{\cdot}36\times{\cdot}36}$

পূর্বপাঠের পুনরালোচনা :

(v) ঐকিক নিয়মে শতকরা হিসাব এবং শতকরা হিসাবে লাভ ও ক্ষতি।

'শতকরা' কথাটিতে 'প্রতি একশতকে কত' তাহা নির্দেশ করে। ঐকিক-নিয়মে 1 কে একক ধরা হয়। যদি 1 কে একক না ধরিয়া 100-কে একক ধরা হয়, তাহা হইতে যে হার পাওয়া যায় তাহাকে বলে 'শতকরা হার'। শতকরা হার বুঝাইবার জন্য '%' চিহ্নটি ব্যবহার করা হয়। শতকরা হারকে 100 দিয়া ভাগ করিলে তুল্যমান ভগ্নাংশ পাওয়া যায়। আবার, ভগ্নাংশকে 100 দিয়া গুণ করিলে তুল্যমান শতকরা হারও পাওয়া যায়।

উদাহরণ 1. এক ব্যক্তি 50 টাকার মধ্যে 42 টাকা খরচ করিলেন। তিনি শতকরা কত টাকা খরচ করিলেন ?

ঐ ব্যক্তি 50 টাকার মধ্যে খরচ করেন $=42$ টাকা।

$\therefore$,, ,, 1 ,, ,, ,, ,, $\dfrac{42}{50}$ টাকা।

$\therefore$,, ,, 100 ,, ,, ,, ,, $=\dfrac{42\times100}{50}$ টাকা।

$=84$ টাকা।

$\therefore$ তিনি শতকরা 84 টাকা খরচ করিলেন।

উদাহরণ 2. একজন ছাত্র পরীক্ষায় 72% নম্বর পাইয়াছে। সে যদি মোট 1200 নম্বরের পরীক্ষা দিয়া থাকে, তাহা হইলে সে মোট কত নম্বর পাইয়াছে ?

ছাত্রটি 100 নম্বরের মধ্যে পাইয়াছে $= 72$ নম্বর।

∴ ,, 1 ,, ,, ,, $= \dfrac{72}{100}$,,

∴ ,, 1200 ,, ,, ,, $= \dfrac{72 \times 1200}{100}$ নম্বর।

$= 864$ নম্বর।

∴ ছাত্রটি 1200 নম্বরের মধ্যে 864 নম্বর পাইয়াছে।

উদাহরণ 3. চাউলের মূল্য $12\frac{1}{2}\%$ কমিয়া যাওয়ায় 40 টাকায় পূর্বাপেক্ষা 2 কি.গ্রা. চাউল বেশী পাওয়া যায়। পূর্বে 40 টাকায় কত চাউল পাওয়া যাইত ?

চাউলের দাম কমিল $= 12\frac{1}{2}\% = \dfrac{12\frac{1}{2}}{100}$ অংশ $= \frac{1}{8}$ অংশ।

∴ বর্তমানে 40 টাকার $\frac{1}{8}$ বা 5 টাকায় 2 কি.গ্রা. চাউল পাওয়া যায়।

∴ বর্তমানে 1 টাকায় $\frac{2}{5}$ কি.গ্রা. চাউল পাওয়া যায়।

∴ ,, 40 ,, $\dfrac{2 \times 40}{5}$ কি.গ্রা. বা 16 কি.গ্রা. চাউল পাওয়া যায়।

∴ পূর্বে 40 টাকায় চাউল পাওয়া যাইত $= 16$ কি.গ্রা. $- 2$ কি.গ্রা.

$= 14$ কি.গ্রা.

উদাহরণ 4. রাম একটি সাইকেল 400 টাকায় কিনিয়া 520 টাকায় বিক্রয় করিল। যে শতকরা কত টাকা লাভ করিল ?

রাম লাভ করে = (520 − 400) টাকা = 120 টাকা।

∴ রাম 400 টাকায় লাভ করে = 120 টাকা

∴ „ 1 „ „ „ $= \frac{120}{400}$ টাকা

∴ „ 100 „ „ „ $= \frac{120 \times 100}{400}$ টাকা

= 30 টাকা।

∴ রাম লাভ করে = 30%

উদাহরণ 5. 8 পয়সায় 10টি বিস্কুট কিনিয়া 10 পয়সায় 8টি বিস্কুট বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ হইবে ?

10টি বিস্কুটের ক্রয় মূল্য = 8 পয়সা

∴ 1 „ „ „ „ $= \frac{8}{10}$ পয়সা বা $\frac{4}{5}$ পয়সা।

8টি বিস্কুটের বিক্রয় মূল্য = 10 পয়সা

∴ 1টি „ „ „ $= \frac{10}{8}$ পয়সা $= \frac{5}{4}$ পয়সা।

∴ লাভ $\frac{5}{4}$ পয়সা − $\frac{4}{5}$ পয়সা $= \frac{9}{20}$ পয়সা।

$\frac{4}{5}$ পয়সায় লাভ হয় $= \frac{9}{20}$ পয়সা

1 „ „ „ $= \frac{9 \times 5}{20 \times 4}$ পয়সা

∴ 100 „ „ „ $= \frac{9 \times 5 \times 100}{20 \times 4}$ পয়সা $= 56\frac{1}{4}$ পয়সা

∴ লাভ হইবে $= 56\frac{1}{4}\%$

প্রশ্নমালা 5

1. একটি বিদ্যালয়ে 800 জন ছাত্রের মধ্যে একদিন 752 জন ছাত্র উপস্থিত ছিল। সেদিন বিদ্যালয়ে শতকরা কতজন ছাত্র উপস্থিত ছিল ?

2. একটি ঘড়ি 180 টাকায় কিনিয়া 225 টাকায় বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ হইবে ?

3. একটি সাইকেল 550 টাকায় কিনিয়া 528 টাকায় বিক্রয় করিলে শতকরা কত ক্ষতি হইবে ?

4. 20 টাকার 20% দিয়া বাজার হইতে রামবাবু 16টি আম কিনিলেন ; তিনি টাকায় কয়টি আম কিনিলেন ?

5. এক ব্যক্তি তাঁহার টাকার 60% খরচ করিবার পর তাঁহার নিকট 120 টাকা রহিল। তাঁহার নিকট কত টাকা ছিল ?

6. একটি গরু 720 টাকায় বিক্রয় করিয়া এক ব্যক্তি 20% লাভ করিল। গরুটির ক্রয়মূল্য কত ?

7. 855 টাকায় একটি জিনিস বিক্রয় করায় একব্যক্তির শতকরা 5 টাকা ক্ষতি হইল। জিনিসটির ক্রয়মূল্য কত ?

8. সরিষা তেলের দাম 25% কমিয়া যাওয়ায় 50 টাকায় পূর্বাপেক্ষা 2 কি.গ্রা. অধিক সরিষা তেল পাওয়া গেল। পূর্বে 50 টাকায় কত তেল পাওয়া যাইত ?

9. চিনির মূল্য 10% বাড়িয়া যাওয়ায় চিনির জন্য ব্যয় বৃদ্ধি না করিয়া গৃহস্থকে শতকরা কত পরিমাণে চিনির ব্যবহার কমাইতে হইবে ?

10. কমলালেবুর মূল্য 10% কমিয়া যাওয়ায় 20 টাকায় 24টি কমলালেবু অধিক পাওয়া গেল। বর্তমানে এক ডজন কমলালেবুর মূল্য কত ?

11. টাকায় 5টি করিয়া আম কিনিয়া টাকায় 4টি করিয়া বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ হইবে ?

12. একব্যক্তি টাকায় 10টি হিসাবে কিছু লেবু কিনিল, পরে টাকায় 15টি হিসাবে ঐ পরিমাণ লেবু কিনিয়া সমস্ত লেবু টাকায় 12টি হিসাবে বিক্রি করিল। তাহার শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইল ?

13. কোন জিনিস 180 টাকায় বিক্রয় করিলে 10% ক্ষতি হয়। কত টাকায় বিক্রয় করিলে 30% লাভ হইবে ?

14. কোন পরীক্ষায় 2500 জন পরীক্ষার্থীর এক-চতুর্থাংশ বালিকা এবং অবশিষ্ট বালক। যদি 36% বালক এবং 40% বালিকা পরীক্ষায় ফেল করে, তবে মোট পরীক্ষার্থীর শতকরা কত অংশ পাশ করিল ?

[S. F. 1960]

15. একটি বাড়ী $12\frac{1}{2}\%$ লাভে 4500 টাকায় বিক্রয় করা হইল। উহা 3800 টাকায় বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইল ?

[C. U. 1924]

দ্বিতীয় অধ্যায়

সামান্য ভগ্নাংশ ও দশমিক ভগ্নাংশের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.

(i) সামান্য ভগ্নাংশের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.

গুণনীয়ক ও গুণিতক :—তোমরা জান, যে সংখ্যা দ্বারা কোন সংখ্যাকে নিঃশেষে ভাগ করা যায় তাহাকে শেষোক্ত সংখ্যার গুণনীয়ক বলে এবং শেষোক্ত সংখ্যাকে পূর্বোক্ত সংখ্যার গুণিতক বলে।

ভগ্নাংশ সম্বন্ধেও একই কথা বলা চলে। যদি কোন ভগ্নাংশ দ্বারা প্রদত্ত সংখ্যাটি নিঃশেষে বিভাজ্য হয় এবং ভাগফল একটি অখণ্ড

সংখ্যা হয়, তবে পূর্বোক্ত ভগ্নাংশটি গুণনীয়ক ও প্রদত্ত সংখ্যাটিকে বলে গুণিতক। যথা—

$\frac{1}{3}$-কে $\frac{1}{12}$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল হয় 4 (একটি অখণ্ড সংখ্যা); অতএব $\frac{1}{12}$ হইল $\frac{1}{3}$ এর একটি গুণনীয়ক এবং $\frac{1}{3}$ হইল $\frac{1}{12}$ এর একটি গুণিতক। আবার, 3-কে $\frac{3}{7}$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল হয় 7 (একটি অখণ্ড সংখ্যা)। অতএব, $\frac{3}{7}$ হইল 3 এর একটি গুণনীয়ক এবং 3 হইল $\frac{3}{7}$ এর একটি গুণিতক।

উপরের উদাহরণ লক্ষ্য করিলে সহজে বুঝিতে পারিবে, কোন ভগ্নাংশের গুণনীয়ক সর্বদাই ভগ্নাংশ হইবে, কখনও পূর্ণসংখ্যা হইবে না এবং ভগ্নাংশটি ক্ষুদ্রতর ভগ্নাংশ হইবে; কিন্তু ভগ্নাংশের গুণিতক ভগ্নাংশ হইতে পারে অথবা অখণ্ড সংখ্যাও হইতে পারে।

ভগ্নাংশের গুণনীয়ক নির্ণয়ঃ একটি ভগ্নাংশের গুণনীয়ক বাহির করিতে হইলে ভগ্নাংশটির লবের কোন গুণনীয়ককে লব এবং হরের কোন গুণিতককে হর ধরিলে যে যে ভগ্নাংশ উৎপন্ন হয়, তাহাদের প্রত্যেকটি হইবে ভগ্নাংশটির গুণনীয়ক। যথা—

$\frac{10}{21} \div \frac{5}{42} = 4$ (একটি অখণ্ড সংখ্যা)

$\therefore$ $\frac{5}{42}$ হইল $\frac{10}{21}$ এর একটি গুণনীয়ক (এখানে 5, 10 এর গুণনীয়ক এবং 42, 21 এর গুণিতক)

দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশের সাধারণ গুণনীয়ক বাহির করিতে হইলে, উহাদের লবের যে-কোন সাধারণ গুণনীয়কে লব এবং উহাদের হরের যে-কোন সাধারণ গুণিতককে হর ধরিতে হইবে।

$\frac{6}{7}$ ও $\frac{12}{5}$ এর সাধারণ গুণনীয়ক বাহির করিতে হইলে দেখা যাইবে—লব 6 ও 12 এর সাধারণ গুণনীয়ক সমূহ: 1, 2, 3, 6.

হর 7 ও 5 এর সাধারণ গুণিতক সমূহ: 35, 70, 105···

$\therefore$ $\frac{6}{7}$ ও $\frac{12}{5}$ এর সাধারণ গুণনীয়কসমূহ : $\frac{1}{35}$, $\frac{2}{35}$, $\frac{3}{35}$, $\frac{6}{35}$, $\frac{1}{70}$, $\frac{2}{70}$, $\frac{3}{70}$, $\frac{6}{70}$, $\frac{1}{105}$······ইত্যাদি।

এই সাধারণ গুণনীয়কগুলির মধ্যে যেটির লব সর্বাপেক্ষা বড় এবং হর সর্বাপেক্ষা ছোট, সেইটি হইবে প্রদত্ত ভগ্নাংশ সমূহের গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক বা গ. সা. গু.।

$\therefore$ কয়েকটি ভগ্নাংশের গ. সা. গু. $= \dfrac{\text{উহাদের লবের গ. সা. গু.}}{\text{উহাদের হরের ল. সা. গু.}}$

উদাহরণ 1. $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ ও $\frac{6}{7}$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

নির্ণেয় গ. সা. গু. $= \dfrac{\text{2, 4 ও 6-এর গ. সা. গু.}}{\text{3, 5 ও 7-এর ল. সা. গু.}} = \frac{2}{105}$

উদাহরণ 2. 6, $\frac{3}{7}$ ও $1\frac{1}{3}$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$\frac{6}{1}$, $\frac{3}{7}$ ও $\frac{4}{3}$ এর গ. সা. গু. $= \dfrac{\text{6, 3 ও 4 এর গ. সা. গু.}}{\text{1, 7 ও 3 এর ল. সা. গু.}} = \frac{1}{21}$

[এখানে 6 কে ভগ্নাংশের আকারে $\frac{6}{1}$ এবং $1\frac{1}{3}$ কে অপ্রকৃত ভগ্নাংশের আকারে $\frac{4}{3}$ লিখিয়া গ. সা. গু. নির্ণয় করা হইয়াছে।]

ভগ্নাংশের গুণিতক নির্ণয় : কোন ভগ্নাংশের লবের কোন গুণিতককে লব এবং হরের কোন গুণনীয়ককে হর ধরিলে যে ভগ্নাংশ পাওয়া যায়, তাহাদের প্রত্যেকটিকে প্রদত্ত ভগ্নাংশের গুণিতক বলে। যথা—

$\frac{14}{3} \div \frac{7}{9} = 6$ (একটি অখণ্ড সংখ্যা)

$\frac{14}{3}$ হইল $\frac{7}{9}$-এর গুণিতক [এখানে 14, 7-এর গুণিতক এবং 3, 9-এর গুণনীয়ক]

দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশের সাধারণ গুণিতক বাহির করিতে হইলে, উহাদের লবের যে-কোন সাধারণ গুণিতককে লব এবং উহাদের হরের যে কোন সাধারণ গুণনীয়ককে হর ধরিতে হইবে।

$\frac{3}{10}$ এবং $\frac{2}{25}$-এর সাধারণ গুণিতক বাহির করিলে দেখা যাইবে, উহাদের লব 3 এবং 2-এর সাধারণ গুণিতকসমূহ : 6, 12, 18··· উহাদের হর 10 এবং 25-এর সাধারণ গুণনীয়ক সমূহ : 1, 5

$\therefore$ $\frac{3}{10}$ এবং $\frac{2}{25}$-এর সাধারণ গুণিতক সমূহ : $\frac{6}{1}, \frac{6}{5}, \frac{12}{1}, \frac{12}{5}, \frac{18}{1}, \frac{18}{5}$·······ইত্যাদি।

এই সাধারণ গুণিতকগুলির মধ্যে যেটির লব সর্বাপেক্ষা ছোট এবং হর সর্বাপেক্ষা বড়, সেইটি হইবে প্রদত্ত ভগ্নাংশ সমূহের লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক বা ল. সা. গু.।

$\therefore$ কয়েকটি ভগ্নাংশের ল. সা. গু. $= \dfrac{\text{উহাদের লবের ল. সা. গু.}}{\text{উহাদের হরের গ. সা. গু.}}$

উদাহরণ 3. $\frac{4}{5}, \frac{14}{15}$ ও $\frac{16}{25}$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

$\therefore$ নির্ণেয় ল.সা.গু. $= \dfrac{\text{4, 14 এবং 16 এর ল. সা. গু.}}{\text{5, 15 এবং 25 এর গ. সা. গু.}} = \frac{112}{5} = 22\frac{2}{5}$

উদাহরণ 4. 4, $3\frac{1}{5}$ এবং $9\frac{1}{3}$-এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

$\frac{4}{1}, \frac{16}{5}$ এবং $\frac{28}{3}$-এর ল. সা. গু.

$= \dfrac{\text{4, 16 এবং 28 এর ল. সা. গু.}}{\text{1, 5 এবং 3 এর গ. সা. গু.}} = \frac{112}{1} = 112$

[এখানে 4-কে ভগ্নাংশ আকারে $\frac{4}{1}$, $3\frac{1}{5}$ এবং $9\frac{1}{3}$-কে অপ্রকৃত ভগ্নাংশের আকারে যথাক্রমে $\frac{16}{5}$ এবং $\frac{28}{3}$ লিখিয়া ল. সা. গু. নির্ণয় করা হইয়াছে।]

দ্রষ্টব্য : ভগ্নাংশের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় করিবার সময় (1) মিশ্র ভগ্নাংশকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশে পরিণত করিতে হয় ; (2) কোন ভগ্নাংশ লঘিষ্ঠ আকারে না থাকিলে তাহাকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিতে হয় ; (3) কোন অখণ্ড সংখ্যা থাকিলে উহার নীচে 1 লিখিয়া উহাকে ভগ্নাংশের আকারে প্রকাশ করিতে হয়।

প্রশ্নমালা 6

গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ **2.** $\frac{5}{6}, \frac{7}{12}$ **3.** $\frac{3}{8}, \frac{9}{21}$ **4.** $1\frac{1}{3}, \frac{5}{6}$

5. $8\frac{1}{5}, 9\frac{3}{10}$ **6.** $2\frac{2}{3}, 3\frac{3}{4}$ **7.** $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$

8. $\frac{6}{5}, \frac{8}{15}, \frac{12}{25}$ **9.** $\frac{8}{9}, \frac{12}{27}, \frac{20}{45}$ **10.** $3, \frac{7}{8}, 1\frac{3}{12}$

11. $3\frac{1}{6}, 5\frac{7}{10}, 8\frac{4}{9}$ **12.** $4\frac{3}{8}, 5\frac{1}{4}, 3\frac{1}{16}$ **13.** $6, \frac{3}{7}, 2\frac{1}{7}, 3\frac{3}{14}$

14. $1\frac{7}{8}, 2\frac{3}{16}, 4\frac{1}{6}, 1\frac{11}{24}$ **15.** $12, 3\frac{3}{5}, 3\frac{3}{7}, 4\frac{4}{11}$

ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

16. $\frac{5}{6}, \frac{8}{9}$ **17.** $\frac{3}{10}, \frac{9}{16}$ **18.** $\frac{18}{19}, \frac{45}{76}$

19. $5, \frac{12}{13}$ **20.** $7\frac{1}{2}, 9\frac{3}{8}$ **21.** $4\frac{1}{3}, 4\frac{10}{17}$

22. $\frac{1}{6}, \frac{3}{8}, \frac{7}{12}$ **23.** $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{12}$ **24.** $\frac{15}{24}, \frac{30}{32}, \frac{50}{64}$

25. $2, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{8}$ **26.** $4, 1\frac{1}{5}, 2\frac{2}{7}$ **27.** $7\frac{1}{2}, 8\frac{3}{4}, 9\frac{3}{8}$

28. $\frac{3}{8}, \frac{6}{15}, \frac{9}{27}, \frac{8}{40}$ **29.** $2\frac{1}{5}, 3\frac{3}{10}, 5\frac{13}{15}, 4\frac{21}{25}$

30. $1\frac{7}{8}, 2\frac{3}{16}, 3\frac{3}{14}, 4\frac{1}{16}$

31. কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা দ্বারা $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ এবং $1\frac{3}{7}$ সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য ?

32. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{24}$ এবং $2\frac{5}{8}$ দ্বারা ভাগ করিলে প্রত্যেক ভাগফল একটি পূর্ণসংখ্যা হইবে ?

33. একখানি গাড়ির দুইটি চাকার পরিধি যথাক্রমে $12\frac{3}{5}$ মিটার এবং $16\frac{1}{10}$ মিটার। গাড়িখানি কমপক্ষে কতদূর গেলে চাকা দুইটি পূর্ণসংখ্যক বার ঘুরিবে ?

34. একখানি পাথরের ওজন অধিকপক্ষে কত হইলে উহা দ্বারা $2\frac{4}{5}$ কি.গ্রা. $3\frac{1}{3}$ কি.গ্রা. এবং $5\frac{1}{3}$ কি.গ্রা. চিনি ওজন করা যাইতে পারে ?

35. পাঁচটি ঘণ্টা একত্রে বাজিয়া পরে যথাক্রমে $1, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}$ এবং 2 সেকেণ্ড অন্তর বাজিতে লাগিল। কতক্ষণ পরে ঘণ্টাগুলি পুনরায় একত্রে বাজিবে? [M. E. 1950]

36. একখানি গাড়ীর সামনের চাকার পরিধি $5\frac{5}{8}$ মিটার এবং পিছনের চাকার পরিধি $7\frac{1}{2}$ মিটার। গাড়ীখানি কমপক্ষে কতদূর গেলে সামনের চাকা পিছনের চাকা অপেক্ষা 110 বার অধিক ঘুরিবে?

37. একটি গাছে যতগুলি পাখী বসিয়াছিল, তাহার $\frac{1}{2}$ অংশ প্রথমবারে, $\frac{1}{3}$ অংশ দ্বিতীয়বারে, $\frac{3}{24}$ অংশ তৃতীয়বারে উড়িয়া গেল। গাছে অন্ততঃ কতগুলি পাখী বসিয়াছিল?

38. আমার যতগুলি টাকা ছিল তাহার $\frac{1}{6}$ শ্যামকে এবং $\frac{4}{7}$ যদুকে দিলাম। আমার নিকট অন্ততঃ কত টাকা ছিল?

39. ক্ষুদ্রতম কোন্ পূর্ণসংখ্যাকে $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}$, এবং $\frac{4}{6}$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল পূর্ণসংখ্যা হইবে?

40. দুইটি ভগ্নাংশের গ. সা. গু. $1\frac{1}{4}$ এবং ল. সা. গু. $7\frac{1}{2}$; একটি ভগ্নাংশ $3\frac{3}{4}$ হইলে অপরটি কত?

(ii) দশমিক ভগ্নাংশের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.

(1) সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া দশমিক ভগ্নাংশের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয়: সামান্য ভগ্নাংশের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় করিবার পদ্ধতি পূর্বে আলোচিত হইয়াছে। দশমিক ভগ্নাংশকে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া সামান্য ভগ্নাংশের গ. সা. গু. বা ল. সা. গু. নির্ণয় করার পদ্ধতিতে গ. সা. গু. বা ল. সা. গু. নির্ণয় করিয়া ঐ ফলকে পুনরায় দশমিকে পরিবর্তিত করিলে দশমিক ভগ্নাংশের গ. সা. গু. বা ল. সা. গু. পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ 1. 4, 1·6 এবং ·08-এর গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$4=\frac{4}{1},\quad 1·6=\frac{8}{5},\quad ·08=\frac{2}{25}$$

(i) 4, 1·6 এবং ·08 এর গ. সা. গু. $=\frac{4}{1}, \frac{8}{5}$ এবং $\frac{2}{25}$ এর গ. সা. গু.

$$=\frac{4, 8 \text{ এবং } 2 \text{ এর গ. সা. গু.}}{1, 5 \text{ এবং } 25 \text{ এর ল. সা. গু.}}=\frac{2}{25}=·08$$

(ii) 4, 1·6 এবং ·08 এর ল.সা.গু. $=\frac{4}{1}, \frac{8}{5}$ এবং $\frac{2}{25}$ এর ল.সা.গু.

$$=\frac{4, 8 \text{ এবং } 2 \text{ এর ল. সা. গু.}}{1, 5 \text{ এবং } 25 \text{ এর গ. সা. গু.}}=\frac{8}{1}=8$$

(2) সমহর বিশিষ্ট সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া দশমিক ভগ্নাংশের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় ঃ

উদাহরণ 2. 2·1, ·35 এবং ·042 এর গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$2·1=\frac{21}{10},\quad ·35=\frac{7}{20},\quad ·042=\frac{21}{500}$$

এই ভগ্নাংশগুলির হর 10, 20 এবং 500 এর ল. সা. গু. $=200$

$\therefore\quad 2·1=\frac{21}{10}=\frac{1050}{500}$; $·35=\frac{7}{20}=\frac{175}{500}$; $·042=\frac{21}{500}$;

সুতরাং, (i) 2·1, ·35 এবং ·042 এর গ. সা. গু.

$=\frac{1050}{500}, \frac{175}{500}$ এবং $\frac{21}{500}$ এর গ. সা. গু.

$$=\frac{1050, 175 \text{ এবং } 21 \text{ এর গ. সা. গু.}}{500}=\frac{7}{500}=·014$$

আবার, (ii) 2·1, ·35 এবং ·042 এর ল. সা. গু.

$=\frac{1050}{500}, \frac{175}{500}$ এবং $\frac{21}{500}$ এর ল. সা. গু.

$$=\frac{1050, 175 \text{ এবং } 21 \text{ এর ল. সা. গু.}}{500}=\frac{1050}{500}=2·1$$

(3) দশমিক পদ্ধতিতে দশমিক ভগ্নাংশের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় :

দশমিক পদ্ধতিতে দশমিক ভগ্নাংশের গ. সা. গু. বা ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে, প্রদত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলিকে প্রয়োজন মত শূন্য বসাইয়া উহাদের প্রত্যেকের দশমিক বিন্দুর পরবর্তী অঙ্কের সংখ্যা সমান করিয়া লইতে হয় এবং উহাদিগকে পূর্ণসংখ্যা রূপে গণ্য করিয়া গ. সা. গু. বা ল. সা. গু. বাহির করিতে হয়। তারপরে প্রত্যেকের যতগুলি দশমিক অঙ্ক আছে প্রাপ্ত গ. সা. গু. বা ল. সা. গু.-এর ডানদিক হইতে বামদিকে ঠিক তত ঘর গুণিয়া দশমিক বিন্দু স্থাপন করিতে হয়। যদি অঙ্কের সংখ্যা কম পড়ে, তবে বামদিকে প্রয়োজন মত 0 বসাইয়া তাহার পরে দশমিক বিন্দু স্থাপন করিতে হয়। এইভাবেও দশমিক ভগ্নাংশের গ. সা. গু. বা ল. সা. গু. নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 3. $1{\cdot}6$, $\cdot32$ এবং $\cdot056$-এর গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

$1{\cdot}6 = 1{\cdot}600$; $\cdot32 = \cdot320$; $\cdot056 = \cdot056$.

এখন, (i) 1600, 320 এবং 56-এর গ. সা. গু. = 8

∴ নির্ণেয় গ. সা. গু. = $\cdot008$

আবার, (ii) 1600, 320 এবং 56-এর ল. সা. গু. = 11200

∴ নির্ণেয় ল. সা. গু. = $11{\cdot}200 = 11{\cdot}2$

প্রশ্নমালা 7

সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া নিম্নলিখিত রাশিগুলির গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $1{\cdot}2$, $\cdot8$
2. $\cdot2$, $\cdot12$, $\cdot016$
3. $\cdot24$, $3{\cdot}6$, $\cdot42$
4. $\cdot4$, $1{\cdot}6$, $2{\cdot}4$
5. 16, $3{\cdot}2$, $\cdot64$
6. $1{\cdot}8$, $\cdot12$, $\cdot006$
7. 5, $\cdot5$, $\cdot05$, $\cdot005$
8. 2, $\cdot4$, $\cdot06$, $\cdot012$

সমহর বিশিষ্ট সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া নিম্নলিখিত রাশিগুলির গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

9. 1·2, 1·6 **10.** ·24, ·36 **11.** ·3, ·6, 1·8
12. 5, ·15, 1·25 **13.** ·8, 1·6, ·024 **14.** 7, 2·1, ·35
15. ·8, ·16, ·048 **16.** 6, 1·2, ·18, ·024

দশমিক পদ্ধতিতে নিম্নলিখিত রাশিগুলির গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

17. 3·2, 4·8 **18.** ·8, 1·2, ·16 **19.** ·3, ·03, ·003
20. 9, 1·8, 7·2 **21.** 18, 1·8, 1·08 **22.** 4, ·08, ·012
23. 3·6, 4·8, ·16, 1·12 **24.** 7, 1·4, ·42, ·063

25. বৃহত্তম কোন্ সংখ্যা দ্বারা 1·6, 3·6, ·56 এবং ·96-কে ভাগ করিলে ভাগফলগুলি পূর্ণসংখ্যা হইবে ?

26. ক্ষুদ্রতম কোন্ সংখ্যাকে ·4, 1·4, ·36 এবং ·42 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফলগুলি পূর্ণসংখ্যা হইবে ?

27. একটি গাড়ীর সম্মুখের চাকার পরিধি 5·25 মিটার এবং পিছনের চাকার পরিধি 7·75 মিটার। কমপক্ষে কত মিটার পথ গেলে গাড়ীর চাকা দুইটি পূর্ণসংখ্যক বার আবর্তন করিবে ?

28. চারিটি ঘণ্টা একত্রে বাজিয়া যথাক্রমে 1·5, 1·8, 2·5 এবং 2·75 সেকেণ্ড অন্তর বাজিতে লাগিল। কতক্ষণ পরে উহারা আবার একত্রে বাজিবে ? পুনরায় একত্রে বাজিবার পূর্বে প্রথম ঘণ্টাটি তৃতীয় ঘণ্টা অপেক্ষা কতবার অধিক বাজিবে ?

29. একটি মাপকাঠি দিয়া 2·4 মিটার, 3·6 মিটার, 7·2 মিটার এবং 12 মিটার কাপড় পূর্ণসংখ্যকবার মাপা যাইতে পারে। ঐ মাপকাঠির দৈর্ঘ্য কত বড় হইতে পারে ?

তৃতীয় অধ্যায়

ভাগ পদ্ধতিতে অখণ্ড সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয়

উৎপাদকের সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয় করিবার প্রণালী তোমরা পূর্বে শিখিয়াছ। আর একটি নূতন প্রণালী হইল ভাগের সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয় পদ্ধতি।

বর্গমান হইতে বর্গমূলের বিচার :

তোমরা জান, $\sqrt{1}=1$, $\sqrt{100}=10$, $\sqrt{10000}=100$,

$\sqrt{1000000}=1000$ ইত্যাদি।

আবার, $\sqrt{81}=9$, $\sqrt{9801}=99$, $\sqrt{998001}=999$,

$\sqrt{99980001}=9999$ ইত্যাদি।

ইহা হইতে দেখিতে পাইতেছ, 1 হইতে 2 অঙ্ক-বিশিষ্ট সংখ্যার বর্গমূল 1 অঙ্ক-বিশিষ্ট ; 3 হইতে 4 অঙ্ক-বিশিষ্ট সংখ্যার বর্গমূল 2 অঙ্ক-বিশিষ্ট ; 5 হইতে 6 অঙ্ক-বিশিষ্ট সংখ্যার বর্গমূল 3 অঙ্ক-বিশিষ্ট ; এবং 7 হইতে 8 অঙ্ক-বিশিষ্ট সংখ্যার বর্গমূল 4 অঙ্ক-বিশিষ্ট হয়।

অতএব, কোন পূর্ণবর্গ সংখ্যার ডানদিকের এককের অঙ্কে একটি চিহ্ন দিয়া ক্রমশঃ বামদিকে একটি অঙ্ক অন্তর চিহ্ন দিয়া গেলে যতগুলি চিহ্ন হইবে, পূর্ণবর্গ সংখ্যার বর্গমূলে ততগুলি অঙ্ক থাকিবে। যথা : 961 এই সংখ্যার একক 1-এর উপর একটি চিহ্ন দিয়া একটি অঙ্ক অন্তর বামদিকে 9-এর উপর চিহ্ন দিলে সহজেই বলা যাইবে যে 961-এর বর্গমূল দুই অঙ্ক-বিশিষ্ট হইবে।

আবার, 938961 এই সংখ্যার একক 1 এর উপর প্রথম চিহ্ন দিয়া ক্রমশঃ বাম দিকে একটি অঙ্ক অন্তর চিহ্ন দিয়া গেলে তিনটি চিহ্ন পড়িবে। $\therefore$ 938961-এর বর্গমূল তিন অঙ্ক বিশিষ্ট হইবে।

961-এর 9-কে প্রথম অংশ এবং 61-কে দ্বিতীয় অংশ বলে। সেইরূপ, 938961-এর 93-কে প্রথম অংশ, 89-কে দ্বিতীয় অংশ এবং 61-কে তৃতীয় অংশ বলে।

অতএব প্রথম অংশ এক বা দুই অঙ্ক-বিশিষ্ট হইতে পারে, কিন্তু পরের অংশগুলি দুই অঙ্ক-বিশিষ্ট হইবে।

বর্গমূল নির্ণয়ের প্রণালী ঃ

বীজগণিতে শিখিয়াছ, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$$= a^2 + (2a+b)b$$

$$\therefore \quad 45^2 = (40+5)^2 = (40)^2 + 2(40)(5) + (5)^2$$
$$= 40^2 + (2 \times 40 + 5) \times 5 = 2025$$

অতএব, কোন সংখ্যাকে এই পদ্ধতিতে দুইটি সংখ্যার সমষ্টিরূপে প্রকাশ করিতে পারিলে সংখ্যাটির বর্গমূল নির্ণয় করা যায়।

আবার, $2025 = 45^2$

বা, $2025 = (40+5)^2 = 40^2 + (2 \times 40 + 5) \times 5$

বা, $2025 - 40^2 = (2 \times 40 + 5) \times 5$

অর্থাৎ 45-এর বর্গ হইতে 40-এর বর্গ বিয়োগ করিয়া উহাকে $(2 \times 40 + 5)$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল 5 হইবে। কোন সংখ্যার প্রথম অংশের বর্গমূল নির্ণয় করার পর পরবর্তী অংশগুলির বর্গমূলের সংখ্যা এইভাবে নির্ণয় করিতে হয়।

উদাহরণ 1. 625-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

625 এই সংখ্যাটির একক 5-এর উপর একটি বিন্দু বসাইয়া একটি অঙ্ক বাদ দিয়া 6-এর উপর আর একটি বিন্দু স্থাপন করায় বুঝা গেল 625-এর বর্গমূল দুই অঙ্ক-বিশিষ্ট হইবে। $20^2 = 400$ এবং $30^2 = 900$-এর মধ্যে 625 অবস্থিত বলিয়া 625 এর বর্গমূল 20 এবং 30-এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যা হইবে।

625 হইতে 20-এর বর্গ 400 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল হয় 225 ; এখন দ্বিতীয় সংখ্যাটি এমন হইবে যাহা 2×20 এর সহিত যোগ করিলে যোগফল 225-এর মধ্যে সংখ্যাটি যত, ততবার যাইবে। 2×20-এর সহিত 5 যোগ করিলে 45 পাওয়া যায়। 225-এর মধ্যে 45 ঠিক 5 বারই যায়।

$\therefore \quad (2 \times 20 + 5) \times 5 = 45 \times 5 = 225$

$\therefore$ বর্গমূলের একক অঙ্কটি $= 5$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= (20 + 5) = 25$

সম্পূর্ণ প্রক্রিয়া

$$\begin{array}{r|l} & \dot{6}2\dot{5}\ (20+5 \\ & 400 \\ \hline 2\times 20+5 & 225 \\ =45 & 225 \\ \hline \end{array}$$

সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়া

$$\begin{array}{r|l} & \dot{6}2\dot{5}\ (25 \\ & 4 \\ \hline 45 & 225 \\ & 225 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= 25$.

উদাহরণ 2. 178929 এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

সম্পূর্ণ প্রক্রিয়া

$$\begin{array}{r|r} & \dot{1}7\dot{8}9\dot{2}\dot{9}\ (400+20+3 \\ & 160000 \\ 2\times 400+20 & 18929 \\ =820 & 16400 \\ \hline 2\times(400+20) & 2529 \\ +3=843 & 2529 \\ \hline \end{array}$$

সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়া

$$\begin{array}{r|r} & \dot{1}7\dot{8}9\dot{2}\dot{9}\ (423 \\ & 16 \\ \hline 82 & 189 \\ & 164 \\ \hline 843 & 2529 \\ & 2529 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= 423$.

বর্গমূল নির্ণয় প্রণালী : (1) প্রদত্ত পূর্ণবর্গ সংখ্যার এককের অঙ্কের মাথায় প্রথম বিন্দু দিয়া ক্রমশঃ বামদিকে একটি অঙ্ক অন্তর বিন্দু দিলে পূর্ণবর্গ সংখ্যাটি কয়েকটি অংশে বিভক্ত হইবে। বিন্দুর সংখ্যা যত হইবে, বর্গমূলে অঙ্কের সংখ্যাও ঠিক তত হইবে।

(2) এবার নামতার সাহায্যে এমন একটি সংখ্যা স্থির করিতে হয় যাহার বর্গ সর্ব বামদিকে অবস্থিত প্রথম অংশের সমান বা তাহার নিকটতম সংখ্যা হয়; অবশ্য উহা কোন সময়ই প্রথম অংশ অপেক্ষা অধিক হইবে না। ঐ সংখ্যাটি হইবে বর্গমূলের প্রথম অঙ্ক। উহাকে ভাগফলের ন্যায় ডানদিকে বসাইতে হয় এবং উহার বর্গ প্রথম অংশ হইতে বিয়োগ করিতে হয়।

(3) এবার ঐ বিয়োগফলের ডানদিকে দ্বিতীয় অংশটি নামাইয়া উহার বামদিকে একটি রেখা টানিয়া ভাজকের ন্যায় প্রথম অংশের বর্গমূলটিকে দ্বিগুণ করিয়া বসাইতে হয়। দ্বিতীয় ধাপে যে সংখ্যা রহিয়াছে, তাহার ডানদিকের একটি অঙ্ক বাদ দিয়া যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তাহা ঐ ভাজকটি দিয়া ভাগ করিলে কত ভাগফল হওয়া সম্ভব জানা যায়। সেই ভাগফলটিকে বর্গমূলের স্থানে পূর্বসংখ্যার ডান দিকে এবং ভাজকের স্থানে ও পূর্ব সংখ্যার ডানদিকে বসাইতে হয়। ইহাতে ভাজকে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তাহাকে বর্গমূলের দ্বিতীয় অঙ্কটি দিয়া গুণ করিলে যত গুণফল হয় তাহা দ্বিতীয় ধাপের ভাজ্যের নীচে বসাইয়া বিয়োগ করিতে হয়।

(4) দ্বিতীয় ধাপের বিয়োগফলের ডানদিকে তৃতীয় অংশটি নামাইতে হয়। বর্গমূলের স্থানে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তাহার দ্বিগুণ করিয়া ভাজকের স্থানে বসাইতে হয়। এবারে পূর্বের ন্যায় শেষ অঙ্ক পর্যন্ত কাজ করিয়া যাইতে হয়।

উদাহরণ 3. 28900 এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

28900 (170
1
27) 189
189

এখানে প্রথম অংশের বর্গমূল 1 পাওয়া গিয়াছে। 1-এর বর্গ 1-কে প্রথম অংশ হইতে বিয়োগ করিয়া ভাগশেষ 1 পাওয়া গিয়াছে। ইহার পর দ্বিতীয় অংশ 89 নামাইয়া 1-এর ডান দিকে বসাইতে দ্বিতীয় ধাপের সংখ্যাটি হইল 189 ; ভাজকের অংশে 1-এর দ্বিগুণ 2 বসান হইল। 189-এর 9 বাদ দিয়া 18-কে 2 দ্বারা ভাগ করায় ভাগফল হইল 9 ; কিন্তু 29-কে 9 দ্বারা গুণ করায় উহা ভাজ্য অপেক্ষা বেশী হইয়া গেল। পরে 9-এর স্থানে 8 লিখিয়া 28-কে 8 দ্বারা গুণ করায় উহাও ভাজ্য অপেক্ষা অধিক হইল। ভাগফল আরও 1 কমাইয়া 27-কে 7 দ্বারা গুণ করায় 189 পাওয়া গেল। এখন প্রদত্ত সংখ্যায় দুইটি শূন্য রহিয়াছে এবং উহা একটি অংশ। অতএব বর্গমূলে একটি শূন্য বসান হইল।

দ্রষ্টব্য : (1) যে সকল সংখ্যার ডানদিকের অঙ্কটি 2, 3, 7 কিংবা 8 ; তাহা পূর্ণবর্গ নহে।

(2) যে সকল সংখ্যার ডানদিকে একটি মাত্র 0 থাকে, তাহা পূর্ণবর্গ সংখ্যা নহে।

(3) যে সকল সংখ্যার ডানদিকে যুগ্ম সংখ্যক শূন্য থাকে তাহা পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইতে পারে, নাও হইতে পারে।

(4) কোন পূর্ণবর্গ সংখ্যার ডানদিকে যুগ্ম সংখ্যক শূন্য থাকিলে, শূন্যগুলিকে পৃথক রাখিয়া অবশিষ্ট অংশের বর্গমূল নির্ণয় করিতে হয়। পরে বর্গমূলের ডানদিকে প্রতি যুগ্ম সংখ্যক শূন্যের জন্য একটি করিয়া শূন্য বসাইতে হয়।

প্রশ্নমালা 8

বর্গমূল নির্ণয় কর :

1.	576	2.	676	3.	729	4.	1089
5.	2704	6.	4096	7.	7225	8.	9216
9.	17424	10.	92416	11.	55225	12.	125316
13.	184900	14.	316969	15.	522729	16.	674041

17. 57592921 [C. U. 1917]

18. 1000014129 [C. U. 1918]

19. 1020304030201 [B. U. 1859]

20. 33447715560000 21. 12345678987654321

বর্গমূল বিষয়ক বিবিধ প্রশ্নের সমাধান :

উদাহরণ 1. 193475-এর সহিত কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যোগ করিলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে ?

```
      193475(439
      16
   83)334
      249
  869)8575
      7821
       754
```

$\therefore$ 193475, এই সংখ্যাটি 439-এর বর্গ অপেক্ষা 754 অধিক কিন্তু 440-এর বর্গ অপেক্ষা কম। অতএব নির্ণেয় লঘিষ্ঠ সংখ্যা যোগ করিলে উহা 440-এর বর্গে পরিণত হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় লঘিষ্ঠ সংখ্যা $= (440)^2 - 193475$

$= 193600 - 193475 = 125.$

উদাহরণ 2. 9250 হইতে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা বিয়োগ করিলে বিয়োগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে ?

$$\begin{array}{r|l} & \dot{9}2\dot{5}0\ (96 \\ & 81 \\ \hline 186 & 1150 \\ & 1116 \\ \hline & 34 \end{array}$$

∴ 9250 হইতে 34 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে।

উদাহরণ 3. একটি দলে যত লোক ছিল, প্রত্যেকে তত পয়সা করিয়া চাঁদা দেওয়ায় 7 টাকা 84 পয়সা চাঁদা উঠিল। দলে কত লোক ছিল এবং প্রত্যেকে কত চাঁদা দিয়াছিল ?

7 টাকা 84 পয়সা = 784 পয়সা।

এখানে বলা হইয়াছে, দলে যত লোক ছিল প্রত্যেকে তত পয়সা করিয়া চাঁদা দিয়াছে।

∴ দুইটি সমান সংখ্যার গুণফল = 784

∴ দলের লোকসংখ্যা = $\sqrt{784}$

= 28 জন।

∴ প্রত্যেকে চাঁদা দিয়াছিল = 28 পয়সা করিয়া।

উদাহরণ 4. এক সেনাপতি তাঁহার সৈন্যদিগকে নিরেট বর্গাকারে সাজাইতে গিয়া দেখিলেন যে 147460 জন সৈন্যের 4 জন সৈন্য বেশী হইয়াছে। সম্মুখ সারিতে কত জন সৈন্য ছিল ?

বর্গাকারে সাজাইবার জন্য সৈন্যের প্রয়োজন হইয়াছে

= (147460 − 4) জন = 147456 জন।

∴ সম্মুখ সারির সৈন্যসংখ্যা = $\sqrt{147456}$ জন।

= 384 জন।

উদাহরণ 5. দুইটি সংখ্যার গুণফল 1600 ; বৃহত্তর সংখ্যাটি ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটির $2\frac{1}{2}$ গুণ। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

মনে করি, ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি $= x$

$\therefore$ বৃহত্তর সংখ্যাটি $= \frac{5}{2}x$

$\therefore$ সংখ্যা দুইটির গুণফল $= \frac{5}{2}x \times x = \frac{5}{2}x^2$

$\frac{5}{2}x^2 = 16000$

$\therefore \quad x^2 = 16000 \div \frac{5}{2} = 6400$

$\therefore \quad x = \sqrt{6400} = 80$

$\therefore$ ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি $= 80$ এবং বৃহত্তর সংখ্যাটি $= (80 \times \frac{5}{2}) = 200$

প্রশ্নমালা 9

1. 116899 এর সহিত কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যোগ করিলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে ?

2. 646464 হইতে ক্ষুদ্রতম কোন্ সংখ্যা বিয়োগ করিলে বিয়োগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে ?

3. কোন্ সংখ্যাকে সেই সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে গুণফল 27225 হয় ?

4. ছয় অঙ্কের ক্ষুদ্রতম পূর্ণবর্গ সংখ্যাটি কত ? [S. F. 1972]

5. ছয় অঙ্কের বৃহত্তম পূর্ণবর্গ সংখ্যাটি কত ?

6. দুইটি সংখ্যার বর্গদ্বয়ের সমষ্টি 6553 ; একটি সংখ্যা 37 হইলে অপরটি কত ?

7. একটি দলে যত লোক ছিল, প্রত্যেকে তত টাকা চাঁদা দেওয়ায় মোট 8649 টাকা চাঁদা উঠিল ; প্রত্যেকে কত টাকা চাঁদা দিয়াছিল ?

8. একটি শ্রেণীতে যত ছাত্র ছিল, প্রত্যেকে তত 25 পয়সা চাঁদা দেওয়ায় 240 টাকা 25 পয়সা চাঁদা উঠিল। ঐ শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা কত ?

9. কোন সমিতিতে যতজন সভ্য ছিল, প্রত্যেকে ততটি 10 পয়সা করিয়া দেওয়ায় 62 টাকা 50 পয়সা চাঁদা উঠিল। সমিতির সভ্যসংখ্যা কত ? [S. F. 1969]

10. একটি বাগানে যতগুলি সারি, প্রত্যেক সারিতে ততগুলি গাছ আছে। বাগানে মোট 9409টি গাছ থাকিলে, প্রত্যেক সারিতে কতগুলি গাছ আছে ?

11. একটি বাগানে যতগুলি সারি, প্রত্যেক সারিতে ততগুলি গাছ ছিল। 754টি গাছ ঝড়ে পড়িয়া যাওয়ায় বাগানে 112142টি গাছ রহিল। বাগানে সারির সংখ্যা কত ছিল ? [M. E. 1966]

12. এক সেনাপতি তাঁহার সৈন্যদিগকে নিরেট বর্গাকারে সাজাইতে গিয়া দেখিলেন যে 9 জন সৈন্য বেশী হইল। মোট সৈন্যসংখ্যা 335250 জন হইলে প্রতি সারিতে কত জন সৈন্য ছিল ?

[C. U. 1911]

13. কোন সেনাপতি তাঁহার সৈন্যদিগকে বর্গাকারে সাজাইতে গিয়া দেখিলেন যে 25 জন সৈন্য কম পড়িতেছে। সৈন্যসংখ্যা 15600 জন হইলে, প্রতি সারিতে কতজন সৈন্য সাজান হইয়াছিল ?

14. একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 82944 বর্গ মিটার। উহার এক বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?

15. একটি বর্গাকার মাঠের ক্ষেত্রফল 625 বর্গমিটার। মাঠের চারিদিকে কতবার ঘুরিয়া আসিলে 1 কিলোমিটার দৌড়ান সম্ভব হইবে ?

16. দুইটি সংখ্যার গুণফল 142805 এবং উহাদের একটি অপরটির 5 গুণ। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর। [S. F. 1971]

17. দুইটি সংখ্যার গুণফল 9375 এবং ছোট সংখ্যাটিকে বড় সংখ্যাটি দিয়া ভাগ করিলে ভাগফল $\frac{3}{5}$ হয়। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

18. তিনটি সংখ্যার মধ্যে প্রথম ও দ্বিতীয়ের গুণফল 56, দ্বিতীয় ও তৃতীয়ের গুণফল 72 এবং প্রথম ও তৃতীয়ের গুণফল 63; সংখ্যাগুলি কি কি?

19. ক ও খ এর টাকার গুণফল 20, খ ও গ এর টাকার গুণফল 24 এবং ক ও গ এর টাকার গুণফল 30 হইলে কাহার কত টাকা আছে? [M. E. 1930]

20. 488** এর লুপ্ত অঙ্ক দুইটি কি হইলে সংখ্যাটি পূর্ণ বর্গ হইবে?

চতুর্থ অধ্যায়

ঐকিক নিয়ম

(i) ঐকিক নিয়মের প্রয়োগে সময় ও কার্য :

কোন কার্য সম্পন্ন করিতে হইলে সময় ও কর্মীর প্রয়োজন। কর্মীর কর্মদক্ষতার উপর কার্যটিতে কত সময় লাগিবে তাহা নির্ভর করে। কাজ করিবার ক্ষমতা সকলের সমান থাকে না। একজন যে কাজ 5 দিনে করিতে পারে, অপর একজনের সেই কাজ করিতে 10 দিনও সময় লাগিতে পারে।

ঐকিক নিয়মে সময় ও কার্য ঘটিত প্রশ্নের সমাধান করিতে হইলে (1) কর্মীর সংখ্যা, (2) সময়, (3) কার্যের পরিমাণ—এই

তিনটির মধ্যে অন্ততঃ দুইটি বিষয় জানা প্রয়োজন। কার্যের পরিমাণ নির্দিষ্ট থাকিলে, কর্মীর সংখ্যা যত বেশী হইবে, সময় তত কম লাগিবে ; কর্মীর সংখ্যা যত কম হইবে, সময় তত বেশী লাগিবে। সময়ের পরিমাণ নির্দিষ্ট থাকিলে, কর্মীর সংখ্যা যত বেশী হইবে কার্যের পরিমাণ তত বৃদ্ধি পাইবে, কিন্তু কর্মীর সংখ্যা কম হইলে কার্যের পরিমাণও কম হইবে। আবার, কর্মীর সংখ্যা নির্দিষ্ট থাকিলে, বেশী সময়ে বেশী কাজ এবং কম সময়ে কম কাজ হইবে।

উদাহরণ .. 16 জন লোক একটি কাজ 10 দিনে করিতে পারে। 20 জন লোক ঐ কাজ কতদিনে সম্পন্ন করিবে ?

16 জন লোক একটি কাজ করে 10 দিনে

∴ 1 " " " " " 10×16 দিনে

∴ 20 " " " " " $\frac{10 \times 16}{20}$ দিনে বা 8 দিনে।

দ্রষ্টব্য : (1) একটি কাজ বলিতে একটি সম্পূর্ণ কাজ (অর্থাৎ 1) বুঝায়।

(2) কে কতখানি কাজ করিতে পারে তাহার উল্লেখ না থাকিলে সকলে একই পরিমাণ কাজ করিতে পারে বলিয়া ধরিতে হয়।

উদাহরণ 2. একটি কাজ ক 20 দিনে এবং খ 30 দিনে করিতে পারে। ক ও খ একত্রে কাজটি কত দিনে করিতে পারিবে ?

ক কাজটি করে 20 দিনে। ∴ ক 1 দিনে কাজটির $\frac{1}{20}$ অংশ করিতে পারে।

খ " " 30 "। ∴ খ 1 " " $\frac{1}{30}$ " করিতে পারে।

∴ ক ও খ একত্রে একদিনে করে কাজটির $(\frac{1}{20}+\frac{1}{30})$ বা $\frac{1}{12}$ অংশ।

$\therefore$ ক ও খ একত্রে কাজটি ($1 \div \frac{1}{12}$) দিনে বা 12 দিনে করিতে পারিবে।

উদাহরণ 3. একটি কাজ A ও B একত্রে 20 দিনে, A ও C একত্রে 24 দিনে এবং B ও C একত্রে 30 দিনে করিতে পারে। C একা ঐ কাজ কতদিনে করিতে পারিবে ?

A ও B একত্রে 1 দিনে করে কাজটির $\frac{1}{20}$ অংশ।

A ও C „ 1 „ „ „ $\frac{1}{24}$ অংশ।

B ও C „ 1 „ „ „ $\frac{1}{30}$ অংশ।

$\therefore$ 2 (A, B, C) একত্রে 1 দিনে করে কাজটির ($\frac{1}{20}+\frac{1}{24}+\frac{1}{30}$) অংশ বা $\frac{1}{8}$ অংশ।

$\therefore$ A, B ও C একত্রে 1 দিনে করে কাজটির ($\frac{1}{8} \div 2$) $= \frac{1}{16}$ অংশ।

$\therefore$ C একা একদিনে করে কাজটির ($\frac{1}{16}-\frac{1}{20}$) অংশ বা $\frac{1}{80}$ অংশ।

$\therefore$ C একা ঐ কাজ সম্পন্ন করিবে ($1 \div \frac{1}{80}$) দিনে বা, 80 দিনে।

উদাহরণ 4. যদি 6 জন পুরুষ বা 9 জন স্ত্রীলোক একটি কাজ 16 দিনে করিতে পারে, তবে 4 জন পুরুষ ও 12 জন স্ত্রীলোক ঐ কাজ কত দিনে করিতে পারিবে ?

6 জন পুরুষ 9 জন স্ত্রীলোকের সমান কাজ করিতে পারে।

$\therefore$ 1 „ „ $\frac{9}{6}$ „ „ „ „ „

$\therefore$ 4 „ „ $\frac{9}{6} \times 4$ বা 6 জন „ „ „ „

$\therefore$ 4 জন পুরুষ ও 12 জন স্ত্রীলোক যে কাজ করিতে পারে, সেই কাজ (6 জন + 12 জন) বা 18 জন স্ত্রীলোকও করিতে পারে।

9 জন স্ত্রীলোক কাজটি করিতে পারে 16 দিনে।

$\therefore$ 1 „ „ „ „ „ 16×9 „

$\therefore$ 18 „ „ „ „ „ $\frac{16 \times 9}{18}$ দিনে বা 8 দিনে।

উদাহরণ 5. 20 জন বালক প্রত্যহ 8 ঘণ্টা পরিশ্রম করিয়া 36 দিনে একটি কাজ করিতে পারে। 15 জন বালক প্রতিদিন কত ঘণ্টা পরিশ্রম করিয়া ঐ কাজ 30 দিনে করিতে পারিবে ?

20 জন বালক কাজটি করে 8×36 ঘণ্টায়

$\therefore$ 1 ,, ,, ,, ,, $8 \times 36 \times 20$ ঘণ্টায়

$\therefore$ 16 ,, ,, ,, ,, $\dfrac{8 \times 36 \times 20}{16}$ ঘণ্টায়

কাজটি 30 দিনে করিতে হইলে প্রতিদিন পরিশ্রম করিতে হইবে $\dfrac{8 \times 36 \times 20}{16 \times 30}$ ঘণ্টায় $= 12$ ঘণ্টা।

উদাহরণ 6. একটি চৌবাচ্চা দুইটি নল দ্বারা যথাক্রমে 24 ও 30 মিনিটে পূর্ণ হয়। দুইটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিয়া কতক্ষণ পরে প্রথম নলটি বন্ধ করিলে আর 15 মিনিটে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইবে ?

শেষের 15 মিনিটে দ্বিতীয় নলটি চৌবাচ্চাটির $(\frac{1}{30} \times 15)$ অংশ বা $\frac{1}{2}$ অংশ পূর্ণ করিয়াছে। সুতরাং প্রথমের দিকে দুইটি নল চৌবাচ্চাটির $(1 - \frac{1}{2})$ অংশ বা $\frac{1}{2}$ অংশ পূর্ণ করিয়াছে।

প্রথম নল 1 মিনিটে পূর্ণ করে চৌবাচ্চাটির $\frac{1}{24}$ অংশ।

দ্বিতীয় নল 1 ,, ,, ,, ,, $\frac{1}{30}$,, ।

$\therefore$ দুইটি নল 1 ,, ,, ,, ,, $(\frac{1}{24} + \frac{1}{30})$ অংশ।

$\therefore$ $\frac{3}{40}$ অংশ চৌবাচ্চাটির পূর্ণ হয় নল দুইটির দ্বারা 1 মিনিটে।

$\therefore$ $\frac{1}{2}$,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, $\frac{40}{3} \times \frac{1}{2}$,, ।

$= \frac{20}{3}$ মিনিটে $= 6\frac{2}{3}$ মিনিটে।

$\therefore$ প্রথম নলটি $6\frac{2}{3}$ মিনিট পরে বন্ধ করা হইয়াছিল।

উদাহরণ 7. একটি চৌবাচ্চায় তিনটি নল আছে। প্রথম ও দ্বিতীয় নল দ্বারা যথাক্রমে 16 ও 12 মিনিটে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়। তৃতীয় নল দ্বারা 8 মিনিটে চৌবাচ্চাটি খালি হইয়া যায়। তিনটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে কতক্ষণে শূন্য চৌবাচ্চা জলপূর্ণ হইবে?

প্রথম নল 1 মিনিটে চৌবাচ্চাটির $\frac{1}{16}$ অংশ পূর্ণ করে।

দ্বিতীয় নল 1 „ „ $\frac{1}{12}$ „ „ „ ।

তৃতীয় নল 1 „ „ $\frac{1}{8}$ অংশ খালি করে।

$\therefore$ তিনটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে 1 মিনিটে চৌবাচ্চাটির $(\frac{1}{16}+\frac{1}{12}-\frac{1}{8})$ অংশ বা $\frac{1}{48}$ অংশ পূর্ণ হয়।

$\therefore$ চৌবাচ্চাটির $\frac{1}{48}$ অংশ পূর্ণ হয় 1 মিনিটে

$\therefore$ চৌবাচ্চাটি জল পূর্ণ হয় $=(1\times\frac{48}{1})$ মিনিটে

$=48$ মিনিটে।

উদাহরণ 8. কোন কাজ 50 দিনে সম্পন্ন করিয়া দিবে বলিয়া এক ব্যক্তি 100 জন লোক নিযুক্ত করিল; কিন্তু 30 দিন পরে দেখিল যে কাজটির $\frac{2}{5}$ অংশ সম্পন্ন হইয়াছে। নির্দিষ্ট সময়ের মধ্যে কাজটি সম্পন্ন করিতে হইলে আর কতজন লোক নিযুক্ত করিতে হইবে?

100 জন লোক 30 দিনে $\frac{2}{5}$ অংশ কাজ সম্পন্ন করিয়াছে। বাকি $(1-\frac{2}{5})$ বা $\frac{3}{5}$ অংশ কাজ $(50-30)$ দিনে বা 20 দিনে সম্পন্ন করিতে হইবে।

$\frac{2}{5}$ অংশ কাজ 30 দিনে করিতে পারে 100 জন লোক।

সম্পূর্ণ কাজ 1 „ „ „ $100\times\frac{5}{2}\times30$ জন লোক।

$\frac{3}{5}$ অংশ কাজ 20 „ „ $100\times\frac{5}{2}\times30\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{20}$ জন লোক

$=225$ জন লোক।

$\therefore$ নির্দিষ্ট সময়ে কাজটি সম্পন্ন করিতে হইলে আর $(225-100)$ জন বা 125 জন লোক নিযুক্ত করিতে হইবে।

উদাহরণ 9. একটি কাজ A 12 দিনে, B 15 দিনে এবং C 20 দিনে করিতে পারে। তাহারা একত্রে কয়েকদিন কাজ করিল। কিন্তু কাজটি শেষ হওয়ার 6 দিন পূর্বে A এবং 2 দিন পূর্বে C চলিয়া গেল। কাজটি মোট কতদিনে শেষ হইল?

A কাজটি করে 12 দিনে $\therefore$ A 1 দিনে করে কাজটির $\frac{1}{12}$ অংশ।
B " " 15 " $\therefore$ B 1 " " " $\frac{1}{15}$ অংশ।
C " " 20 " $\therefore$ C 1 " " " $\frac{1}{20}$ অংশ।

$\therefore$ A, B ও C, 1 দিনে করে কাজটির $(\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20})$ অংশ বা $\frac{1}{5}$ অংশ।

কাজটি শেষ হওয়ার 6 দিন পূর্বে A চলিয়া গিয়াছে।

$\therefore$ A চলিয়া যাওয়ার পর B, 6 দিন এবং C, $(6-2)$ দিন বা 4 দিন কাজ করিয়াছে।

সেই সময়ে B, 6 দিনে কাজটির $(\frac{1}{15}\times 6)$ অংশ বা $\frac{2}{5}$ অংশ এবং C, 4 দিনে $(\frac{1}{20}\times 4)$ অংশ বা $\frac{1}{5}$ অংশ সম্পন্ন করিয়াছে।

ঐ সময়ে B ও C একত্রে কাজটির $(\frac{2}{5}+\frac{1}{5})$ অংশ $=\frac{3}{5}$ অংশ সম্পন্ন করিয়াছে।

বাকি $1-\frac{3}{5}$ বা $\frac{2}{5}$ অংশ কাজ A, B ও C একত্রে করিয়াছে।

$\frac{1}{5}$ অংশ কাজ A, B ও C করে 1 দিনে।

$\therefore$ $\frac{2}{5}$ " " A, B ও C " $(\frac{2}{5}\div\frac{1}{5})$ দিনে $=2$ দিনে।

$\therefore$ কাজটি শেষ করিতে মোট সময় লাগে $=6$ দিন $+2$ দিন $=8$ দিন।

প্রশ্নমালা 10

1. রাম ও শ্যাম একটি কাজ 10 দিনে করিতে পারে। 2 দিনে তাহারা কাজটির কত অংশ করিতে পারিবে ? $\frac{3}{5}$ অংশ কাজ করিতে তাহাদের কত দিন সময় লাগিবে ?

2. একজন পুরুষ যে কাজ 9 দিনে করে, একজন বালক সেই কাজ 18 দিনে করিতে পারে। তাহারা উভয়ে একত্রে কাজ করিলে কাজটি কত দিনে করিতে পারিবে ?

3. A ও B একটি কাজ 16 দিনে করিতে পারে। A একা ঐ কাজ 24 দিনে করিতে পারিলে, B কত দিনে করিতে পারিবে ?

4. একটি কাজ A একা 12 দিনে, B একা 15 দিনে এবং C একা 20 দিনে করিতে পারে। তাহারা সকলে মিলিত হইয়া কত দিনে সেই কাজটি শেষ করিতে পারিবে ?

5. A, B ও C একত্রে একটি কাজ 3 দিনে করিতে পারে ; ঐ কাজ A একা 5 দিনে এবং B একা 12 দিনে করিতে পারে। C একা ঐ কাজটি কত দিনে করিতে পারিবে ? [C. U. Suppl. 1948]

6. A ও B একটি কাজ 8 দিনে করিতে পারে, সেই কাজটি B ও C 12 দিনে এবং A, B ও C একত্রে 6 দিনে করিতে পারে। A ও C ঐ কাজটি কত দিনে করিতে পারিবে ? [S. F. 1962]

7. A ও B একটি কাজ 12 দিনে করিতে পারে ; সেই কাজটি B ও C 15 দিনে এবং A ও C 20 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। A একাকী ঐ কাজ কতদিনে সম্পন্ন করিতে পারে ?

8. A একটি কাজ 12 দিনে এবং B সেই কাজটি 6 দিনে করিতে পারে। তাহারা একত্রে কাজটি আরম্ভ করিল। 2 দিন কাজ করার পর B চলিয়া গেল। আর কত দিনে A কাজটি শেষ করিবে ?

9. অসিতের যে কাজ করিতে 24 দিন লাগে, অমিতের সেই কাজ করিতে 32 দিন লাগে। তাহারা দুইজনে কাজটি আরম্ভ করিল, কিন্তু কাজটি শেষ হওয়ার 4 দিন পূর্বে অসুস্থতার জন্য অসিত কাজ ছাড়িয়া চলিয়া গেল। কাজটি মোট কত দিনে শেষ হইল ?

10. A একটি কাজ 8 দিনে এবং B 12 দিনে করিতে পারে। B কাজটি আরম্ভ করিবার 2 দিন পরে A কাজে যোগ দিল এবং উভয়ে মিলিয়া কাজটি শেষ করিল। মোট কত দিনে কাজটি শেষ হইল ?

11. A ও B একত্রে একটি কাজ 18 দিনে করিতে পারে ; B একা সেই কাজ 27 দিনে করিতে পারে। তাহারা একত্রে 3 দিন কাজ করার পর B কাজ ছাড়িয়া চলিয়া যায়। A অবশিষ্ট কাজ কতদিনে শেষ করিবে ?

12. A 4 দিনে কাজের $\frac{2}{5}$ অংশ সম্পন্ন করিল। তারপর B-এর সাহায্য লইয়া বাকি কাজ সে 2 দিনে সম্পন্ন করিল। B একা সম্পূর্ণ কাজটি কতদিনে করিতে পারিত ?

13. A একদিনে B এর তিন গুণ কাজ করিতে পারে। তাহারা উভয়ে 9 দিনে একটি কাজের $\frac{2}{5}$ অংশ সম্পন্ন করিল। প্রত্যেকে পৃথক পৃথক ভাবে সমগ্র কাজটি কতদিনে করিতে পারিবে ?

14. A একা একটি কাজ 10 দিনে, B একা 15 দিনে, এবং C একা 20 দিনে করিতে পারে। তাহারা একত্রে তিন দিন কাজ করার পর A কাজ ছাড়িয়া চলিয়া গেল। বাকি কাজ B ও C কত দিনে সম্পন্ন করিবে ?

15. A একা একটি কাজ 18 দিনে, B 12 দিনে এবং C 24 দিনে করিতে পারে। তাহারা একত্রে কাজ আরম্ভ করিল, কিন্তু

কাজটি শেষ হওয়ার 4 দিন পূর্বে A এবং তার 2 দিন পরে B কাজ ছাড়িয়া চলিয়া গেল। কাজটি কত দিনে শেষ হইল ?

16. 24 জন লোক 15 দিনে একটি কাজের অর্ধেক সম্পন্ন করিল। আর কত জন অতিরিক্ত লোক নিযুক্ত করিলে বাকী অর্ধেক কাজ 12 দিনে শেষ হইবে ?

17. 8 জন পুরুষ বা 10 জন স্ত্রীলোক যে কাজ 36 দিনে করে, 4 জন পুরুষ ও 4 জন স্ত্রীলোক উহা কত দিনে করিবে ?

18. 8 জন পুরুষ বা 12 জন স্ত্রীলোক একটি কাজ 25 দিনে করে, 6 জন পুরুষ ও 11 জন স্ত্রীলোক তাহা কত দিনে করিবে ?

19. 5 জন পুরুষ এবং 9 জন বালক একটি কাজ 17 দিনে করিতে পারে। 9 জন পুরুষ ও 12 জন বালক ঐ কাজ কত দিনে করিবে ? (2 জন পুরুষের কাজ 3 জন বালকের কাজের সমান)

20. 8 জন লোক বা 12 জন স্ত্রীলোক যে কাজ 14 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে, 18 জন লোক এবং 21 জন স্ত্রীলোক উহার দ্বিগুণ একটি কাজ কত দিনে করিতে পারিবে ? [D. B. 1942]

21. 2 জন পুরুষ বা 3 জন স্ত্রীলোক বা 4 জন বালক একটি কাজ 65 দিনে করিতে পারিলে 6 জন পুরুষ, 6 জন স্ত্রীলোক এবং 6 জন বালক ঐ কাজ একত্রে কত দিনে করিবে ?

22. যদি 16 জন লোক প্রত্যহ 10 ঘণ্টা খাটিয়া 9 দিনে একটি কাজ করিতে পারে, তবে 24 জন লোক প্রত্যহ 12 ঘণ্টা খাটিয়া কাজটি কত দিনে করিবে ?

23. যদি 20 জন লোক প্রত্যহ 10 ঘণ্টা খাটিয়া 14 দিনে একটি কাজ করিতে পারে, তবে 25 জন লোক প্রত্যহ কত ঘণ্টা খাটিলে কাজটি 16 দিনে শেষ করিবে ?

24. যদি প্রতিদিন 9 ঘণ্টা বিশ্রাম করিয়া এক ব্যক্তি 35 দিনে 600 মাইল পথ চলিতে পারে, তবে প্রতিদিন 10 ঘণ্টা বিশ্রাম করিয়া পূর্বগতির $1\frac{1}{2}$ গুণ দ্রুত চলিয়া, কত দিনে সেই ব্যক্তি 375 মাইল পথ চলিতে পারিবে ? [C. U. 1888]

25. একজন ঠিকাদার একটি কাজ 36 দিনে শেষ করিয়া দিবার চুক্তিতে 60 জন লোক নিযুক্ত করিল। নির্দিষ্ট সময়ের $\frac{5}{9}$ অংশ সময়ে কাজটির $\frac{4}{7}$ অংশ সম্পন্ন হইল। আর কতজন অতিরিক্ত লোক নিযুক্ত করিলে নির্দিষ্ট সময়ে কাজটি শেষ হইবে ?

26. একটি চৌবাচ্চায় দুইটি নল আছে। একটির দ্বারা 10 মিনিটে এবং অপরটির দ্বারা 15 মিনিটে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়। নল দুইটি একসঙ্গে খুলিয়া দিলে কতক্ষণ পরে শূন্য চৌবাচ্চা পূর্ণ হইবে ?

27. একটি পিপায় তিনটি নল আছে। প্রথম দুইটি নল দ্বারা পিপাটি যথাক্রমে 21 ও 28 মিনিটে জলপূর্ণ হয় এবং তৃতীয় নল দ্বারা জলপূর্ণ পিপা 14 মিনিটে খালি হইয়া যায়। তিনটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে কতক্ষণে শূন্য পিপাটি জলপূর্ণ হইবে ?

28. দুইটি নল যথাক্রমে 20 ও 30 মিনিটে একটি চৌবাচ্চা পূর্ণ করে। দুইটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দেওয়ার কতক্ষণ পরে প্রথম নলটি বন্ধ করিয়া দিলে আর 10 মিনিটে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইবে ?

29. একটি চৌবাচ্চায় দুইটি নল আছে। প্রথম নল দ্বারা চৌবাচ্চাটি 27 মিনিটে এবং দ্বিতীয় নল দ্বারা 18 মিনিটে পূর্ণ হয়। প্রথম নলটি 7 মিনিট শূন্য চৌবাচ্চাকে জল পূর্ণ করার পর দ্বিতীয় নলটি খোলা হইল। চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইতে মোট কত সময় লাগিবে ?

30. একটি চৌবাচ্চা প্রথম দুইটি নলদ্বারা 16 ও 24 মিনিটে পূর্ণ হয়, কিন্তু তৃতীয় নল দ্বারা 32 মিনিটে পূর্ণ চৌবাচ্চা খালি হইয়া যায়। তিনটি নল একই সময়ে খুলিয়া দেওয়ার 2 মিনিট পরে প্রথম নলটি বন্ধ করিয়া দেওয়া হইল। আর কতক্ষণ পরে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইবে ?

(ii) ঐকিক নিয়মের প্রয়োগে সরল সুদকষা

সংসারের বিভিন্ন প্রয়োজন মিটাইবার জন্য একজন আর এক জনের নিকট হইতে টাকা ধার করে এবং তাহা পরিশোধও করে। টাকা পরিশোধ করিবার সময় যাহার নিকট হইতে টাকা ধার লওয়া হয়, তাহাকে আসল ছাড়াও অতিরিক্ত কিছু টাকা দিতে হয়।

যে টাকা ধার দেয়, তাহাকে উত্তমর্ণ বা পাওনাদার (Creditor) বলে। যে ধার নেয়, তাহাকে অধমর্ণ বা দেনাদার (Debtor) বলে।

যে টাকা ধার দেওয়া হয় তাহাকে মূলধন বা আসল (Capital বা Principal) বলে।

নির্দিষ্ট সময়ের অন্তে ধারের টাকা পরিশোধের সময় অধমর্ণ উত্তমর্ণকে আসল টাকা এবং ঐ টাকা ব্যবহারের জন্য অতিরিক্ত কিছু টাকা দিয়া থাকে। ঐ অতিরিক্ত অর্থকে সুদ (Interest) বলে। সুদ ও আসল মিলিয়া যে টাকা হয়, তাহাকে সুদ-আসল বা **সবৃদ্ধিমূল** (Amount) বলে।

কোন নির্দিষ্ট সংখ্যক টাকার নির্দিষ্ট সময়ের সুদকে **সুদের হার** (Rate of interest) বলে। সুদের হার প্রতি টাকায় বা প্রতি 100 টাকায় মাসিক বা বার্ষিক হিসাবে ধরা হইয়া থাকে। 'প্রতি টাকায় মাসিক 2 পয়সা হার সুদে টাকা ধার করা হইয়াছে'—

বলিলে বুঝিতে হইবে এক টাকা ধার করিলে একমাসে 2 পয়সা সুদ দিতে হইবে। 'শতকরা বার্ষিক 5 টাকা হার সুদে টাকা ধার করা হইয়াছে' বলিলে বুঝিতে হইবে 100 টাকা ধার করিলে এক বৎসরে 5 টাকা সুদ দিতে হইবে। সময়ের উল্লেখ না করিয়া '5%' হারে টাকা ধার দেওয়া হইয়াছে' বলিলে বুঝিতে হইবে 100 টাকার এক বৎসরের সুদ 5 টাকা।

সুদ ও সুদ-আসল নির্ণয়

সুদ ও সুদ-আসল নির্ণয় করিতে হইলে (1) মূলধনের পরিমাণ বা আসল, (2) সুদের হার এবং (3) সময় জানা প্রয়োজন। যে সময়ের সুদ নির্ণয় করিতে হয়, সেই সময়ের নানাভাবে উল্লেখ থাকে। কিন্তু সুদ নির্ণয়ের কালে নির্দিষ্ট সময়কে বৎসরে রূপান্তরিত করিতে হয়। (i) মাস ও দিনে সময় দেওয়া থাকিলে 30 দিনে মাস ও 12 মাসে বৎসর ধরিতে হয়।

(ii) কোন একটি নির্দিষ্ট তারিখ হইতে অন্য একটি নির্দিষ্ট তারিখ পর্যন্ত সময় দেওয়া থাকিলে প্রথম ও শেষ তারিখকে মাত্র একদিন ধরিয়া মোট দিনসংখ্যা গণনা করিতে হয় এবং মোট দিন-সংখ্যাকে 356 দিয়া ভাগ করিলে বৎসর পাওয়া যায়।

(iii) প্রথম ও শেষ দিনের মধ্যে লিপ্-ইয়ার বর্ষের ফেব্রুয়ারী মাস পড়িলে দিনসংখ্যা গণনার সময় ফেব্রুয়ারী মাস 29 দিনে ধরিতে হয়, এবং 365 দিয়া ভাগ করিয়া বৎসরে পরিণত করিতে হয়।

(ii) কোন মাসের প্রথম তারিখ হইতে অন্য কোন মাসের শেষ তারিখ পর্যন্ত সুদ নির্ণয় করিতে হইলে পুরা মাস ধরিয়া সেই মাসের সংখ্যাকে 12 দিয়া ভাগ করিয়া বৎসরে পরিণত করিতে হয়।

উদাহরণ 1. প্রতিটাকায় মাসিক সুদ 1 পয়সা হইলে 40 টাকার 1 বৎসর 3 মাসের সুদ কত ?

1 বৎসর 3 মাস = 15 মাস।

1 টাকার 1 মাসের সুদ = 1 পয়সা

∴ 40 " 1 " " = 1 পয়সা × 40

∴ 40 " 15 " " = 1 পয়সা × 40 × 15

∴ নির্ণেয় সুদ = 600 পয়সা = 6 টাকা।

উদাহরণ 2. প্রতি টাকায় বার্ষিক সুদ 15 পয়সা হইলে 120 টাকার 2 বৎসর 4 মাসের সুদ-আসল নির্ণয় কর।

2 বৎসর 4 মাস = $(2+\frac{4}{12})$ বৎসর = $(2+\frac{1}{3})$ বৎসর = $\frac{7}{3}$ বৎসর।

1 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 15 পয়সা

∴ 120 " 1 " " = 15 পয়সা × 120

∴ 120 " $\frac{7}{3}$ " " = 15 পয়সা × 120 × $\frac{7}{3}$

= 4200 পঃ = 42 টাকা।

∴ নির্ণেয় সুদ-আসল = 120 টাকা + 42 টাকা = 162 টাকা।

উদাহরণ 3. শতকরা মাসিক 3 টাকা হার সুদে 150 টাকার 4 বৎসর 6 মাসের সুদ কত ?

4 বৎসর 6 মাস = $4\frac{1}{2}$ বৎসর = $\frac{9}{2}$ বৎসর।

100 টাকার 1 মাসের সুদ = 3 টাকা।

∴ 100 " 1 বৎসরের সুদ = 3 টাকা × 12

∴ 1 " 1 " " = $\frac{3\times 12}{100}$ টাকা।

∴ 150 " $\frac{9}{2}$ " " = $\frac{3\times 12\times 150\times 9}{100\times 2}$

= 243 টাকা।

উদাহরণ 4. 6% হার সুদে 450 টাকার 4 বৎসরের সবৃদ্ধিমূল কত ?

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 6 টাকা

∴ 1 „ 1 „ „ = $\frac{6}{100}$ টাকা

∴ 450 „ 4 „ „ = $\frac{6 \times 450 \times 4}{100}$ টাকা।

= 108 টাকা

∴ নির্ণেয় সবৃদ্ধিমূল = 450 টাকা + 108 টাকা = 558 টাকা।

অন্য প্রণালীতেও সবৃদ্ধিমূল নির্ণয় করা যায়। যথা ঃ

∴ 100 টাকার 4 বৎসরের সুদ = 6 টাকা × 4 = 24 টাকা।

∴ 100 টাকার 4 বৎসরে সবৃদ্ধিমূল = (100 + 24) টাকা।

= 124 টাকা।

∴ 1 „ 4 „ „ = $\frac{124}{100}$ টাকা।

∴ 450 „ 4 „ „ = $\frac{124 \times 450}{100}$ টাকা।

= 558 টাকা।

উদাহরণ 5. 1974 খ্রীষ্টাব্দের 15ই মার্চ হইতে 8ই আগস্ট পর্যন্ত 5% হার সুদে 300 টাকার সুদ ও সবৃদ্ধিমূল নির্ণয় কর।

15ই মার্চ হইতে 8ই আগস্ট পর্যন্ত মোট দিনসংখ্যা

= (31 − 15) + 30 + 31 + 30 + 31 + 8

= 16 + 30 + 31 + 30 + 31 + 8 = 146

∴ 146 দিন = $\frac{146}{365}$ বৎসর = $\frac{2}{5}$ বৎসর।

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 5 টাকা।

∴ 1 „ 1 „ „ = $\frac{5}{100}$ টাকা

∴ 300 „ $\frac{2}{5}$ „ „ = $\frac{5 \times 300}{100} \times \frac{2}{5}$ টাকা

∴ নির্ণেয় সুদ = 6 টাকা।

∴ নির্ণেয় সবৃদ্ধিমূল = 300 টাকা + 6 টাকা = 306 টাকা।

প্রশ্নমালা 11

1. টাকা প্রতি মাসিক সুদ 2 পয়সা হইলে 125 টাকার 7 মাসের সুদ কত ?

2. 20 টাকার 5 মাসের সুদ 1 টাকা হইলে 128 টাকার 1 বৎসরের সুদ কত ?

3. শতকরা মাসিক 5 টাকা হার সুদে 225 টাকার 219 দিনের সুদ কত হইবে ?

4. শতকরা মাসিক 4 টাকা 50 পয়সা হার সুদে 600 টাকার 146 দিনের সুদ কত হইবে ?

5. শতকরা বার্ষিক 4 টাকা হার সুদে 450 টাকার 2 বৎসরের সুদ কত ?

6. বার্ষিক 3% হার সুদে 375 টাকার 3 বৎসরের সুদ কত ?

7. বার্ষিক $7\frac{1}{2}$% হার সুদে 700 টাকার 4 বৎসরের সুদ কত ?

8. বার্ষিক $6\frac{1}{4}$% হার সুদে 1000 টাকার 6 বৎসর 6 মাসের সুদ কত ?

9. বার্ষিক 10% হার সুদে 225 টাকার 12ই মার্চ হইতে 24শে মে পর্যন্ত সুদ কত ?

10. বার্ষিক 5% হার সুদে 1500 টাকার 1942 সালের 19শে জানুয়ারী হইতে 26শে আগষ্ট পর্যন্ত সুদ কত ?

11. শতকরা বার্ষিক 6 টাকা হার সুদে 500 টাকার 3 বৎসরের সুদ ও সুদ-আসল কত ?

12. শতকরা বার্ষিক $6\frac{1}{4}$ টাকা হার সুদে 1200 টাকার 5 বৎসরের সুদ ও সবৃদ্ধিমূল কত ?

13. বার্ষিক $3\frac{3}{4}\%$ হার সুদে 560 টাকার 2 বৎসর 6 মাসের সুদ ও সবৃদ্ধিমূল কত ?

14. 1948 সালের 15ই ফেব্রুয়ারী 8% হার সুদে 375 টাকা ধার দিলে 10ই জুলাই পর্যন্ত সুদে-মূলে কত পাওয়া যাইবে ?

15. বার্ষিক $8\frac{1}{3}\%$ হারে 300 টাকার 15 মাসের পর সবৃদ্ধিমূল কত ?

16. বার্ষিক $6\frac{2}{3}\%$ হারে 750 টাকার 10 বৎসর 10 মাসের পর সবৃদ্ধিমূল কত ?

17. বার্ষিক $2\frac{1}{2}\%$ হারে 400 টাকার 3 বৎসর 1 মাস 15 দিনের সুদ কত ?

18. বার্ষিক 8% হারে 900 টাকার 1 বৎসর 2 মাস 10 দিনের সুদ কত ?

19. বার্ষিক $7\frac{1}{2}\%$ হারে 1632 টাকা 50 পয়সার 20 বৎসরের সুদ কত ?

20. একব্যক্তি 1লা জানুয়ারী ব্যাঙ্কে 1000 টাকা জমা দিয়া 6 মাস পরে 600 টাকা উঠাইয়া লইল। বর্ষশেষে বার্ষিক 3% হারে তাহার কত সুদ প্রাপ্য হইবে ? [S. F. 1961]

আসল নির্ণয়

(i) মোট সুদ, সময় ও সুদের হার ; অথবা (ii) সবৃদ্ধিমূল, সময় ও সুদের হার দেওয়া থাকিলে আসল নির্ণয় করা যায়।

(i) মোট সুদ, সময় ও সুদের হার দেওয়া থাকিলে :

উদাহরণ 1. শতকরা বার্ষিক 4 টাকা হার সুদে কত টাকার 6 বৎসরের সুদ 72 টাকা হইবে ?

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 4 টাকা।

∴ 100 ,, 6 ,, ,, = 4 টাকা × 6 = 24 টাকা।

∴ সুদ 24 টাকা হইলে আসল হয় = 100 টাকা।

∴ „ 1 „ „ „ „ = $\frac{100}{24}$ টাকা।

∴ „ 72 „ „ „ „ = $\frac{100 \times 72}{24}$ টাকা = 300 টাকা

∴ নির্ণেয় আসল = 300 টাকা।

উদাহরণ 2. বার্ষিক $9\frac{1}{8}$% হার সুদে কত টাকার দৈনিক সুদ 1 টাকা হইবে ?

1 দিনে 1 টাকা সুদ হইলে 1 বৎসরে সুদ হয় = 365 টাকা।

বৎসরে $\frac{73}{8}$ টাকা সুদ হইলে আসল হয় = 100 টাকা।

∴ 1 „ „ „ „ „ = $\frac{100 \times 8}{73}$ টাকা।

∴ 365 „ „ „ „ „ = $\frac{100 \times 8 \times 365}{73}$ টাকা।

= 4000 টাকা।

∴ নির্ণেয় আসল = 4000 টাকা।

(ii) সবৃদ্ধিমূল, সময় ও সুদের হার দেওয়া থাকিলে :

উদাহরণ 3. বার্ষিক $7\frac{1}{2}$% হার সুদে কত টাকার 4 বৎসরের সবৃদ্ধিমূল 650 টাকা হইবে ?

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = $\frac{15}{2}$ টাকা।

∴ 100 „ 4 „ „ = $\frac{15}{2} \times 4$ টাকা = 30 টাকা।

4 বৎসর পরে 100 টাকার সবৃদ্ধিমূল হয় = (100 + 30) টাকা

130 টাকা সবৃদ্ধিমূল হইলে আসল হয় = 100 টাকা।

∴ 1 „ „ „ „ „ = $\frac{100}{130}$ টাকা।

∴ 650 „ „ „ „ „ = $\frac{100 \times 650}{130}$ টাকা

= 500 টাকা।

∴ নির্ণেয় আসল = 500 টাকা।

উদাহরণ 4. কোন মূলধনের 4 বৎসরে 472 টাকা এবং 7 বৎসরে 526 টাকা সবৃদ্ধিমূল হয়। মূলধন নির্ণয় কর।

আসল + 7 বৎসরের সুদ = 526 টাকা।
আবার, আসল + 4 বৎসরের সুদ = 472 টাকা।

∴ (বিয়োগ করিয়া) 3 বৎসরের সুদ = 54 টাকা।
∴ 1 ,, ,, = 18 টাকা।
∴ 4 ,, ,, = 72 টাকা।
∴ আসল = 472 টাকা − 72 টাকা = 400 টাকা।

প্রশ্নমালা 12

1. শতকরা বার্ষিক 4 টাকা হার সুদে কত টাকার 3 বৎসরের সুদ 60 টাকা হইবে?

2. শতকরা বার্ষিক 2 টাকা হার সুদে কত টাকার 4 বৎসরের সুদ 80 টাকা হইবে?

3. শতকরা বার্ষিক 3 টাকা হার সুদে কত টাকার 6 বৎসরের সুদ 90 টাকা হইবে?

4. বার্ষিক 6% হার সুদে কত টাকার 4 বৎসরের সুদ 96 টাকা হইবে?

5. বার্ষিক 6% হার সুদে কোন্ মূলধনের 2 বৎসর 6 মাসের সুদ 150 টাকা হইবে?

6. বার্ষিক $4\frac{1}{18}$% হার সুদে কত টাকায় প্রতিদিন 1 টাকা সুদ পাওয়া যায়? [C. U. 1937]

7. বার্ষিক $6\frac{1}{4}$% হার সুদে কত টাকায় দৈনিক এক টাকা সুদ পাওয়া যাইবে? [C. U. 1942]

8. বার্ষিক 5% হারে কত টাকার দৈনিক সুদ 25 পয়সা হয়?

9. বার্ষিক 4% হার সুদে কত টাকা 5 বৎসরে সুদে-মূলে 360 টাকা হইবে ?

10. বার্ষিক $6\frac{2}{3}$% হারে কত টাকার 5 বৎসরের সবৃদ্ধিমূল 100 টাকা হইবে ? [C. U. 1932]

11. বার্ষিক 3% হার সুদে কত টাকার 3 বৎসরের সবৃদ্ধিমূল 545 টাকা হইবে ? [C. U. 1953]

12. শতকরা বার্ষিক 6·50 টাকা হার সুদে কত আসল 4 বৎসরে সুদে-মূলে 756 টাকা হইবে ?

13. শতকরা বার্ষিক 8·00 টাকা হার সুদে কত আসল 3 বৎসর 3 মাসে সুদে-মূলে 630 টাকা হইবে ?

14. বার্ষিক $7\frac{1}{2}$% হার সুদে কত টাকার ৩রা মার্চ হইতে 15ই মে পর্যন্ত সবৃদ্ধিমূল 1421 টাকা হইবে ?

15. আসল ও 5 বৎসরের সুদের সমষ্টি 550 টাকা ; যদি সুদ আসলের $\frac{3}{8}$ অংশ হয়, তবে আসল কত ? [C. U. 1951]

16. আসল ও 8 বৎসরের সুদ একত্রে 1120 টাকা। যদি সুদ আসলের $\frac{2}{5}$ অংশ হয়, তবে আসল কত ?

17. কোন মূলধন নির্দিষ্ট সুদে 3 বৎসরে 560 টাকা এবং 5 বৎসরে 600 টাকা সবৃদ্ধিমূল হয় ; মূলধন নির্ণয় কর।

18. কোন মূলধন 3 বৎসরে 632·50 টাকা এবং $4\frac{1}{2}$ বৎসরে 673·75 টাকা সবৃদ্ধিমূল হয় ; মূলধন কত ? [S. F. 1962]

19. একব্যক্তি 1972 খ্রীস্টাব্দের 1লা মার্চ তারিখে 6% হার সুদে কিছু টাকা ধার করিল এবং সে সেই বৎসর 6ই অক্টোবর সুদসহ টাকা পরিশোধ করিল। ইহাতে তাহাকে 1554 টাকা দিতে হইল। সে কত টাকা ধার করিয়াছিল ?

20. এক ব্যক্তি দুই কিস্তিতে সমপরিমাণ টাকা খাটাইয়াছিল। প্রথম কিস্তিতে সুদের হার $3\frac{1}{4}\%$ এবং দ্বিতীয় কিস্তিতে সুদের হার $1\frac{3}{4}\%$; 18 মাস পরে সে উভয় কিস্তি বাবদ মোট 510 টাকা সুদ পাইল। সে প্রতি কিস্তিতে কত টাকা খাটাইয়াছিল ?

সুদের হার নির্ণয়

(i) আসল, সময় ও মোট সুদ, অথবা, (ii) আসল, সবৃদ্ধিমূল ও সময় দেওয়া থাকিলে ঐকিক নিয়মে সুদের হার নির্ণয় করা যায়। সুদের হার সাধারণতঃ শতকরা হিসাবে প্রকাশ করা হইয়া থাকে।

(i) আসল, সময় ও মোট সুদ দেওয়া থাকিলে ঃ

উদাহরণ 1. শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে 300 টাকার 6 বৎসরের সুদ 90 টাকা হইবে ?

300 টাকার 6 বৎসরের সুদ $=$ 90 টাকা

$\therefore$ 1 " 1 " " $=\frac{90}{300\times6}$ টাকা

$\therefore$ 100 " 1 " " $=\frac{90\times100}{300\times6}$ টাকা $=$ 5 টাকা।

$\therefore$ নির্ণেয় সুদের হার $=5\%$

উদাহরণ 2. কোন আসলের 4 বৎসরের সুদ আসলের $\frac{3}{10}$ অংশ। শতকরা সুদের হার কত ?

ধরা গেল, আসল $=$ 100 টাকা, তাহা হইলে প্রশ্নানুসারে

ঐ আসলের 4 বৎসরের সুদ $=$ 100 টাকা $\times\frac{3}{10}=$ 30 টাকা।

এখন, 100 টাকার 4 বৎসরের সুদ $=$ 30 টাকা

$\therefore$ 100 " 1 " " $=\frac{30}{4}$ টাকা $=7\frac{1}{2}$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় সুদের হার $=7\frac{1}{2}\%$

(ii) **আসল, সবৃদ্ধিমূল ও সময় দেওয়া থাকিলে :**

উদাহরণ 3. শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে 600 টাকা 5 বৎসরে সুদেমূলে 720 টাকা হইবে ?

মোটসুদ = সবৃদ্ধিমূল − আসল।

∴ 600 টাকার 5 বৎসরের সুদ = (720 − 600) টাকা বা 120 টা.।

∴ 1 „ 1 „ „ $= \frac{120}{600 \times 5}$ টাকা

∴ 100 „ 1 „ „ $= \frac{120 \times 100}{600 \times 5}$ টাকা = 4 টাকা।

∴ নির্ণেয় সুদের হার = 4%

উদাহরণ 4. শতকরা বার্ষিক কতহার সুদে কোন মূলধন 20 বৎসরে সুদে-মূলে দ্বিগুণ হইবে ?

ধরা গেল, মূলধন = 100 টাকা, ∴ 20 বৎসরে সুদে-মূলে দ্বিগুণ অর্থাৎ 200 টাকা হইবে।

∴ মোট সুদ = (200 − 100) টাকা = 100 টাকা হইবে।

∴ 100 টাকার 20 বৎসরের সুদ = 100 টাকা।

∴ 100 „ 1 „ „ $= \frac{100}{20}$ টাকা = 5 টাকা।

∴ নির্ণেয় সুদের হার = 5%

প্রশ্নমালা 13

1. শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে 60 টাকার 5 বৎসরের সুদ 15 টাকা হইবে ?

2. শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে 125 টাকার 6 বৎসরের সুদ 60 টাকা হইবে ?

3. শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে 400 টাকার 4 বৎসর 6 মাসের সুদ 90 টাকা হইবে ?

4. 438 টাকার দৈনিক সুদ 6 পয়সা হইলে শতকরা বার্ষিক সুদের হার কত ?

5. 1260 টাকার মাসিক সুদ 4 টাকা 20 পয়সা হইলে শতকরা বার্ষিক সুদের হার কত ?

6. 17ই জুন হইতে 29শে আগস্ট পর্যন্ত 2500 টাকার সুদ 30 টাকা হইলে শতকরা বার্ষিক সুদের হার কত ?

7. কোন আসলের $6\frac{1}{4}$ বৎসরের সুদ, আসলের $\frac{3}{4}$ অংশ ; শতকরা সুদের হার কত ? [C. U. 1949]

8 কত হার সুদে যে-কোন মূলধনের $12\frac{1}{2}$ বৎসরের সুদ মূলধনের সমান হইবে ?

9. শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে যে-কোন মূলধনের 16 বৎসরের সুদ আসলের দ্বিগুণ হইবে ?

10. 12 বৎসর 3 মাসে 250 টাকা যদি 372 টাকা 50 পয়সায় পরিণত হয় তবে সুদের হার কত ?

11. শতকরা বার্ষিক সুদের হার কত হইলে 400 টাকা 5 বৎসরে সুদে-মূলে 540 টাকা হইবে ?

12. শতকরা কত হার সুদে 3300 টাকা 3 বৎসরে সুদে-মূলে 3621 টাকা 75 পয়সা হইবে ? [S. F. 1953]

13. 5 বৎসর পরে কোন আসল সুদে-মূলে 306 টাকা হয়। সুদ আসলের $\frac{9}{25}$ অংশ হইলে সুদের হার কত ? [D. B. 1936]

14. এক ব্যক্তি একই দিনে এবং একই হার সুদে রামকে 1200 টাকা এবং যদুকে 800 টাকা ধার দিলেন। তিনি 5 বৎসর 5 মাস

পরে উভয়ের নিকট হইতে সুদে-মূলে মোট 2650 টাকা আদায় করিলেন। তিনি কত হার সুদে টাকা ধার দিয়াছিলেন ?

15. শতকরা বার্ষিক সুদের হার কত হইলে যে-কোন আসলের 12 বৎসরের সুদ সবৃদ্ধিমূলের $\frac{3}{4}$ অংশ হইবে ?

16. বার্ষিক শতকরা কত হার সুদে কোন মূলধন 15 বৎসরে সুদে-আসলে দ্বিগুণ হইবে ?

17. সুদের হার কত হইলে কোন মূলধন 25 বৎসরে সুদে আসলে 3 গুণ হইবে ? [C. U. 1936]

18. কোন মূলধনের 4 বৎসরে 420 টাকা এবং 6 বৎসরে 455 টাকা সবৃদ্ধিমূল হয়। আসল ও সুদের হার নির্ণয় কর।

19. শতকরা বার্ষিক সুদের হার কত হইলে 400 টাকার 5 বৎসরের সুদ এবং একই হারে 600 টাকার 4 বৎসরের সুদ একত্রে 132 টাকা হইবে ? [C. U. 1939]

20. শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে 800 টাকার 4 বৎসরের সুদ বার্ষিক 4% হারে 625 টাকার 8 বৎসরের সুদের সমান হইবে ?

[C. U. 1927]

সময় নির্ণয়

(i) মোট সুদ, সুদের হার ও আসল, অথবা (ii) আসল সুদ-আসল ও সুদের হার দেওয়া থাকিলে ঐকিক নিয়মে সময় নির্ণয় করা যায়। আসলের মোট সুদকে এক বৎসরের সুদ দিয়া ভাগ করিলে নির্ণেয় সময় পাওয়া যায়।

(i) মোট সুদ, সুদের হার ও আসল দেওয়া থাকিলে :

উদাহরণ 1. শতকরা বার্ষিক 3% হার সুদে কত বৎসরে 400 টাকার সুদ 36 টাকা হইবে ?

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 3 টাকা।

∴ 1 " 1 " " = $\frac{3}{100}$ টাকা।

∴ 400 " 1 " " = $\frac{3 \times 400}{100}$ টাকা

= 12 টাকা।

400 টাকার 12 টাকা সুদ হয় = 1 বৎসরে।

∴ " " 1 " " " = $\frac{1}{12}$ বৎসরে।

∴ " " 36 " " " = $\frac{1 \times 36}{12}$ বৎসরে = 3 বৎসরে।

∴ নির্ণেয় সময় = 3 বৎসর।

উদাহরণ 2. বার্ষিক 5% হারে 500 টাকার 4 বৎসরের সুদ যত টাকা হয়, বার্ষিক $6\frac{1}{4}$% হারে কত বৎসরে 200 টাকায় সেই সুদ পাওয়া যাইবে ?

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 5 টাকা।

∴ 1 " 1 " " = $\frac{5}{100}$ টাকা।

∴ 500 " 4 " " = $\frac{5 \times 500 \times 4}{100}$ টাকা।

= 100 টাকা।

∴ 5% হারে 500 টাকার 4 বৎসরের সুদ = 100 টাকা।

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = $\frac{25}{4}$ টাকা।

∴ 1 " 1 " " = $\frac{25}{4 \times 100}$ টাকা।

∴ 200 " 1 " " = $\frac{25 \times 200}{4 \times 100}$ টাকা।

= $12\frac{1}{2}$ টাকা।

200 টাকার $\frac{25}{2}$ টাকা সুদ হয় $=1$ বৎসরে।

$\therefore$,, ,, 1 ,, ,, ,, $=\frac{1\times 2}{25}$ বৎসরে।

$\therefore$,, ,, 100 ,, ,, ,, $=\frac{1\times 2\times 100}{25}$ বৎসরে

$=8$ বৎসরে।

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $=8$ বৎসর।

(ii) আসল, সুদ-আসল ও সুদের হার দেওয়া থাকিলে :

উদাহরণ 3. বার্ষিক 6% হার সুদে কত বৎসরে 600 টাকার সবৃদ্ধিমূল 780 টাকা হইবে ?

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ $=6$ টাকা।

$\therefore$ 1 ,, 1 ,, ,, $=\frac{6}{100}$ টাকা।

$\therefore$ 600 ,, 1 ,, ,, $=\frac{6\times 600}{100}$ টাকা $=36$ টাকা।

600 টাকার নির্ণেয় সময়ের সুদ $=780$ টাকা $-$ 600 টাকা।

$=180$ টাকা।

600 টাকার 36 টাকা সুদ হয় $=1$ বৎসরে।

$\therefore$,, ,, 1 ,, ,, ,, $=\frac{1}{36}$,,

$\therefore$,, ,, 180 ,, ,, ,, $=\frac{1\times 180}{36}$ বৎসরে $=5$ বৎসরে।

উদাহরণ 4. বার্ষিক 5% হার সুদে কত বৎসরে যে-কোন আসল সুদে-মূলে তিন গুণ হইবে ?

ধরা গেল আসল $=100$ টাকা, ঐ আসল নির্ণেয় সময়ে সুদে-মূলে 3 গুণ $=300$ টাকা হইবে। অতএব নির্ণেয় সময়ে সুদ হইবে $=(300-100)$ টাকা $=200$ টাকা।

100 টাকার 5 টাকা সুদ হয় = 1 বৎসরে।

∴ ,, ,, 1 ,, ,, ,, = $\frac{1}{5}$ বৎসরে।

∴ ,, ,, 200 ,, ,, ,, = $\frac{1 \times 200}{5}$ বৎসরে = 40 বৎসরে।

∴ নির্ণেয় সময় = 40 বৎসর।

প্রশ্নমালা 14

1. বার্ষিক 3% হার সুদে কত সময়ে 75 টাকার সুদ 18 টাকা হইবে ?

2. শতকরা বার্ষিক 4 টাকা হার সুদে কত বৎসরে 200 টাকার সুদ 32 টাকা হইবে।

3. কত দিনে বার্ষিক 5% হার সুদে 450 টাকার সুদ 9 টাকা হইবে ?

4. বার্ষিক 10% হার সুদে 600 টাকা ১লা মে ধার লইলে কোন্ তারিখে সেই টাকার সুদ 12 টাকা হইবে ?

5. বার্ষিক $7\frac{1}{2}$% হার সুদে 1000 টাকা ধার দিলে কত বৎসরে সেই টাকার সুদ 150 টাকা পাওয়া যাইবে ?

6. শতকরা 4 টাকা হার সুদে রামকে 500 টাকা ও শ্যামকে 600 টাকা একই দিনে ধার দিয়া কয়েক বৎসর পরে উভয়ের নিকট হইতে 220 টাকা সুদ পাওয়া গেল। যদি উভয়ের নিকট হইতে একই দিনে সুদ আদায় করা হইয়া থাকে, তবে কত বৎসর পরে সুদ আদায় করা হইয়াছিল ?

7. বার্ষিক $6\frac{1}{4}$% হার সুদে 800 টাকার কত বৎসরের সুদ, বার্ষিক 5% হারে 1000 টাকার 6 বৎসরের সুদের সমান হইবে ?

8. বার্ষিক 5% হারে সুদে কত বৎসরের সুদ কোন আসলের $\frac{7}{20}$ অংশ হইবে ?

9. বার্ষিক $2\frac{1}{2}$% হার সুদে কত বৎসরে 400 টাকা সুদে-মূলে 460 টাকা হইবে ?

10. বার্ষিক $7\frac{1}{2}$% হার সুদে কত বৎসরে 600 টাকা সুদে-মূলে 780 টাকা হইবে ?

11. শতকরা বার্ষিক 6 টাকা হার সুদে 540 টাকার কত বৎসরের সবৃদ্ধিমূল 864 টাকা হইবে ?

12. $3\frac{1}{3}$% হার সুদে কত বৎসরে 1350 টাকার সবৃদ্ধিমূল 1620 টাকা হইবে ? [C. U. 1947]

13. বার্ষিক $4\frac{1}{2}$% হার সুদে কত বৎসরে 1200 টাকা সুদে-মূলে 1389 টাকা হইবে ?

14. 6% হার সুদে কত বৎসরে যে কোন টাকা সুদে-আসলে দ্বিগুণ হইবে ?

15. 10% হার সুদে কত বৎসরে কোন টাকার সুদ সবৃদ্ধিমূলের $\frac{3}{7}$ অংশ হইবে ?

16. 5% হার সুদে 1600 টাকা দ্বিগুণ হইতে কত সময় লাগিবে ?

17. কোন আসল 20 বৎসরে দ্বিগুণ হয় ; কত বৎসরে উহা তিন গুণ হইবে ?

18. কোন আসল বার্ষিক 4% হার সুদে 6 বৎসরে সুদে আসলে 930 টাকা হয়। কত সময়ে উহা সুদে-আসলে 1020 টাকা হইবে ?

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1

1. 93324   2. 82,83,84   3. 17548, 14911
4. 1266000   5. 635 এর স্থলে 685   6. 254 এর স্থলে 234
7. 17   8. 125, 115   9. 400
10. A—33, B—57, C—18   11. 400 টাকা
12. 137   13. 8470   14. 1260 টাকা
15. 3300 টাকা   16. 17 টাকা   17. 5 টাকা 80 পয়সা
18. 3000টি   19. 8টি   20. 64 জন
21. 60 টাকা, 96 জন   22. ক 385 টাকা, খ 127 টাকা, গ 61 টাকা
23. পুরুষ টাকা 44·50, স্ত্রীলোক টাকা 29·20, বালক টাকা 14·00
24. 46 বৎসর, 22 বৎসর   25. 56 বৎসর, 24 বৎসর।

প্রশ্নমালা 2

1. 16 জন   2. 20 পয়সা   3. 45   4. 11   5. 9
6. 24   7. 25 ; 12   8. 42টি   9. 6 মিনিট
10. 896 মিটার   11. 121   12. 100080   13. 20150
14. 1892   15. 99491   16. 5 এবং 1265
17. 10712933   18. 352   19. 360
20. 101, 1111 অথবা 505, 707   21. 49 এবং 56   22. 274

প্রশ্নমালা 3

1. $1\frac{7}{24}$ 2. $1\frac{23}{36}$ 3. 1   4. 1   5. $\frac{1}{2}$ 6. 4
7. $\frac{1}{2}$ 8. 2   9. $\frac{11}{16}$ 10. 2   11. $\frac{3}{14}$ 12. $\frac{17}{27}$
13. $1\frac{2}{3}$ 14. 4   15. 2   16. 7   17. 16   18. 48
19. 225 টাকা   20. 96 টাকা   21. 60
22. 24 মিটার   23. 70 মাইল   24. 55 টাকা
25. A 1 টাকা 10 পয়সা, B 50 পয়সা   26. 5040 টাকা
27. 2250 টাকা   28. 164 গ্যালন   29. 1 কি.গ্রা. 850 গ্রাম
30. আয় অধিক ধরা হইয়াছে $\frac{1}{12}$ অংশ 780 টাকা।

প্রশ্নমালা 4

1. 207·2143	2. 34·3	3. 202·305
4. ·185	5. 342·516	6. 14·94715
7. 675 বার		8. 186·2784
9. 33·5 বৎসর, 9·5 বৎসর		10. 200000 টাকা
11. 3·3	12. ·147	13. 2·5
14. ·12	15. 2	16. 1

প্রশ্নমালা 5

1. 94%	2. 25%	3. 4%	4. 4টি
5. 300 টাকা	6. 600 টাকা	7. 900 টাকা	8. 6 কিগ্রা
9. $9\frac{1}{11}$%	10. 1 টাকা		11. 25%
12. লাভ বা ক্ষতি নাই		13. 260 টাকা	14. 63%
15. 5% ক্ষতি।			

প্রশ্নমালা 6

1. $\frac{1}{4}$	2. $\frac{1}{12}$	3. $\frac{3}{56}$	4. $\frac{1}{6}$	5. $\frac{1}{10}$
6. $\frac{1}{12}$	7. $\frac{1}{15}$	8. $\frac{2}{75}$	9. $\frac{4}{9}$	10. $\frac{1}{8}$
11. $\frac{19}{90}$	12. $\frac{7}{16}$	13. $\frac{3}{14}$	14. $\frac{5}{48}$	15. $\frac{6}{385}$
16. $13\frac{1}{3}$	17. $4\frac{1}{2}$	18. $4\frac{14}{19}$	19. 60	20. $37\frac{1}{2}$
21. 78	22. $10\frac{1}{2}$	23. $26\frac{1}{4}$	24. $9\frac{3}{8}$	25. 18
26. 48	27. $262\frac{1}{2}$	28. 6	29. $580\frac{4}{5}$	30. $2047\frac{1}{2}$
31. $\frac{2}{105}$	32. $2\frac{5}{8}$	33. $289\frac{4}{5}$ মিটার		34. $\frac{2}{45}$ কি.গ্রা.
35. 3 মি. 30 সে.			36. 3 কি. মি. 500 মিটার	
37. 84টি	38. 42 টাকা	39. 12	40. $2\frac{1}{2}$.	

প্রশ্নমালা 7

1. ·4, 2·4	2. ·008, 1·2	3. ·06, 25·2
4. ·4, 4·8	5. ·64, 16	6. ·006, 1·8
7. ·005, 5	8. ·004, 6	9. ·4, 4·8
10. ·12, ·72	11. ·3, 1·8	12. ·05, 15
13. ·008, 4·8	14. ·35, 21	15. ·016, 2·4
16. ·012, 18	17. 1·6, 9·6	18. ·08, 2·4

19. ·003, ·3 20. 1·8, 36 21. ·36, 54
22. ·004, 12 23. ·08, 100·8 24. ·007, 63
25. ·08 26. 25·2 27. 162·75 মিটার
28. 8 মি. 15 সে., 132 বার 29. 1·2 মিটার।

প্রশ্নমালা 8

1. 24 2. 26 3. 27 4. 33
5. 52 6. 64 7. 85 8. 96
9. 132 10. 304 11. 235 12. 354
13. 430 14. 563 15. 723 16. 821
17. 7589 18. 31623 19. 1010101 20. 5783400
21. 111111111.

প্রশ্নমালা 9

1. 65 2. 48 3. 165 4. 100489
5. 998001 6. 72 7. 93 টাকা 8. 31 জন
9. 25 জন 10. 97 টি 11. 336 টি 12. 579 জন
13. 125 জন 14. 288 মিটার 15. 10 বার
16. 845, 169 17. 125, 75 18. 7, 8, 9
19. ক 5 টাকা, খ 4 টাকা, গ 6 টাকা 20. 4, 1.

প্রশ্নমালা 10

1. $\frac{1}{5}$, 6 দিন 2. 6 দিন 3. 48 দিন 4. 5 দিন
5. 20 দিন 6. 8 দিন 7. 30 দিন 8. 6 দিন
9. 16 দিন 10. 6 দিন 11. 45 দিন 12. 5 দিন
13. 30 দিন, 90 দিন 14. 3 দিন, 15. $7\frac{9}{13}$ দিন
16. 6 জন 17. 40 দিন 18. 15 দিন
19. 11 দিন। 20. 7 দিন 21. 10 দিন 22. 5 দিন
23. 7 ঘণ্টা 24. 16 দিন, 1 ঘণ্টা 25. 75 জন
26. 6 মিনিট 27. 1 ঘণ্টা, 24 মিনিট 28. 8 মিনিট
29. 15 মিনিট 30. 1 ঘণ্টা, 22 মিনিট।

প্রশ্নমালা 11

1. টা. 17·50 2. টা. 15·36 3. টা. 81·00
4. টা. 129·60 5. টা. 36·00 6. টা. 33·75

7. টা. 210·00	8. টা. 406·25	9. টা. 4·50
10. টা. 45·00	11. টা. 90·00, টা. 590·00	
12. টা. 375·00, টা. 1575·00	13. টা. 52·50, টা. 612·50	
14. টা. 387·00	15. টা. 331·25	16. $1291\frac{2}{3}$ টাকা
17. টা. 31·25	18. টা. 86·00	19. টা. 2448·75
20. 21 টাকা।		

প্রশ্নমালা 12

1. 500 টাকা	2. 1000 টাকা	3. 500 টাকা
4. 400 টাকা	5. 1000 টাকা	6. 9000 টাকা
7. 5840 টাকা	8. 1825 টাকা	9. 300 টাকা
10. 75 টাকা	11. 500 টাকা	12. 600 টাকা
13. 500 টাকা	14. 1400 টাকা	15. 400 টাকা
16. 800 টাকা	17. 500 টাকা	18. 550 টাকা
19. 1500 টাকা	20. 6800 টাকা।	

প্রশ্নমালা 13

1. 5%	2. 8%	3. 5%	4. 5%
5. 4%	6. 6%	7. 12%	8. 8%
9. $12\frac{1}{2}$%	10. 4%	11. 7%	12. $3\frac{1}{4}$%
13. $7\frac{1}{5}$%	14. 6%	15. 5%	16. $6\frac{2}{3}$%
17. 8%	18. 350 টাকা, 5%	19. 3%	20. $6\frac{1}{4}$%

প্রশ্নমালা 14

1. 8 বৎসর	2. 4 বৎসর	3. 146 দিন
4. 13 জুলাই	5. 2 বৎসর	6. 5 বৎসর
7. 6 বৎসর	8. 7 বৎসর	9. 6 বৎসর
10. 4 বৎসর	11. 10 বৎসর	12. 6 বৎসর
13. 3 বৎসর 6 মাস	14. 16 বৎসর 8 মাস	15. 7 বৎসর 6 মাস
16. 20 বৎসর	17. 40 বৎসর	18. 9 বৎসর

বীজগণিত

প্রথম ভাগ

বীজগণিত

[সপ্তম শ্রেণীর পাঠ্য]

প্রথম অধ্যায়

বীজগণিতীয় প্রতীকের সাহায্যে পাটীগণিতের প্রশ্নাবলীর ফলাফল প্রকাশ

[The use of Symbols to generalise arithmetical problems (without formally introducing equations)]

আমাদের পুণ্য জন্মভূমি ভারতবর্ষই বীজগণিতের উৎপত্তি স্থল। ভারতীয় গণিতজ্ঞগণ সমীকরণের "বীজ" নির্ণয় করিয়া বহু প্রশ্নের সমাধান করিতেন। ফলে বীজগণিতের আবির্ভাব ঘটে। 'অ্যাল্‌জেব্‌রা' (Algebra) শব্দের উৎপত্তি ঘটে আরবীয় 'অ্যাল্‌জাব্‌র্‌' (Al-jabr) শব্দ হইতে। আরব দেশের বিখ্যাত পণ্ডিত মহম্মদ্‌ বিন্‌ মুসা ভারতবর্ষ হইতে সংখ্যা-বিজ্ঞান শিক্ষা করিয়া "Al-jabr-W'almuquaballah" নামক গ্রন্থ প্রণয়ন করেন। উহা ত্রয়োদশ শতাব্দীতে ইউরোপে প্রচারিত হয়। ফলে বীজগণিতের ইংরাজী নাম হয় Algebra।

বীজগণিতীয় প্রতীক :—বীজগণিত গণিতশাস্ত্রের একটি শাখা। পাটীগণিতে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0—এই দশটি অঙ্কের সাহায্যে যাবতীয় সংখ্যা প্রকাশ করা হইয়া থাকে ; বীজগণিতে কিন্তু এই দশটি অঙ্ক ব্যতীত $a, b, c \cdots$ প্রভৃতি ইংরাজী বর্ণমালার অক্ষর এবং α (alpha), β (beta), γ (gamma)$\cdots$প্রভৃতি গ্রীক বর্ণমালার অক্ষরও সংখ্যাসূচক চিহ্ন হিসাবে ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

পাটীগণিতে ব্যবহৃত অঙ্কের নির্দিষ্ট মান আছে। কিন্তু বীজগণিতের অক্ষর দ্বারা যে-কোন সংখ্যা নির্দেশ করা যায়।

পাটীগণিতের ন্যায় বীজগণিতে $+$, $-$, $\times$ এবং $\div$ এই চারিটি প্রক্রিয়া-বোধক চিহ্ন ব্যবহৃত হইয়া থাকে এবং এই চিহ্নগুলির দ্বারা যথাক্রমে যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ প্রক্রিয়া সূচিত হইয়া থাকে। $4+5$-এর অর্থ 4-এর সহিত 5 যোগ; বীজগণিতে $x+y$-এর অর্থ x-এর সহিত y যোগ। সেইরূপ $x-y$-এর অর্থ x হইতে y বিয়োগ, $a \times b$ বা $a.b$ অথবা ab-এর অর্থ a ও b-র গুণ। প্রতীক-গুলি পাশাপাশি লিখিলেই গুণ বুঝায়। $a \div b$, বা, $\frac{a}{b}$ বা, a/b-এর অর্থ a-কে b দিয়া ভাগ। আর এক প্রকার চিহ্ন ব্যবহৃত হয়, তাহাকে বলে ($\sim$) অন্তর-চিহ্ন। ইহা বৃহত্তরটি হইতে ক্ষুদ্রতরটির বিয়োগফল নির্দেশ করে। যথা, $5 \sim 8$ এর অর্থ, $8-5=3$। সেইরূপ বীজগণিতে $a \sim b$ এর অর্থ, $a-b$ (a অপেক্ষা b ক্ষুদ্রতর হইলে), অথবা $b-a$ (a অপেক্ষা b বৃহত্তর হইলে)।

সূচক চিহ্ন ও মূল চিহ্ন পাটীগণিতে ও বীজগণিতে একরূপ। যথা—

5^2 দ্বারা 5×5 বুঝায়, সেইরূপ x^2 দ্বারা $x \times x$ বুঝায়।

5^3 দ্বারা $5 \times 5 \times 5$ বুঝায়, সেইরূপ x^3 দ্বারা $x \times x \times x$ বুঝায়।

$\sqrt{x}$ দ্বারা x-এর বর্গমূল এবং $\sqrt[3]{x}$ দ্বারা x-এর ঘনমূল বুঝায়।

পাটীগণিতের ন্যায় বীজগণিতে $=$, $>$, $<$, $\neq$, $\ngtr$, $\nless$, $\equiv$, $\therefore$ এবং $\because$ প্রভৃতি চিহ্নগুলি একই অর্থে ব্যবহৃত হয়।

$x=y$-এর অর্থ x এবং y পরস্পর সমান।

$x>y$-এর অর্থ x, y অপেক্ষা বৃহত্তর।

$x<y$-এর অর্থ x, y অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

$x \neq y$-এর অর্থ x এবং y পরস্পর সমান নয়।

$x \ngtr y$-এর অর্থ x, y অপেক্ষা বৃহত্তর নয়।

$x \nless y$-এর অর্থ x, y অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নয়।

$x \equiv y$-এর অর্থ x এবং y সর্বতোভাবে সমান।

ইহা ছাড়া '—' রেখাবন্ধনী (Vinculum), ( ) লঘু বন্ধনী বা প্রথম বন্ধনী (First bracket), { } ধনু বন্ধনী বা দ্বিতীয় বন্ধনী (Second bracket) এবং [ ] গুরু বন্ধনী বা তৃতীয় বন্ধনী (Third bracket)-গুলি পাটীগণিতে ও বীজগণিতে একই অর্থে ব্যবহৃত হয়। যথা—

$x-\overline{y+z}$-এর অর্থ x হইতে y এবং z-এর যোগফল বিয়োগ করিতে হইবে এবং $x-(y+z)$-এর অর্থ x হইতে y এবং z-এর যোগফল বিয়োগ করিতে হইবে। ইত্যাদি।

বীজগণিতীক প্রতীকের ব্যবহার :

(i) কোন্ সংখ্যা হইতে 10 বিয়োগ করিলে 6 বাকি থাকে ?

(ii) কোন্ সংখ্যা হইতে x বিয়োগ করিলে y বাকি থাকে ?

এখানে দেখা যাইতেছে যে, প্রতি ক্ষেত্রে যোগ করিলে নির্ণেয় সংখ্যা পাওয়া যাইবে।

সুতরাং, (i) নির্ণেয় সংখ্যা $=10+6=16$, (ii) নির্ণেয় সংখ্যা $=x+y$.

এখানে লক্ষ্য কর, x এবং y-এর মান বিভিন্ন সংখ্যা বসাইয়া পাটীগণিতের একই প্রকারের সমস্ত প্রশ্নের উত্তর পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ 2. (i) তোমার বর্তমান বয়স 12 বৎসর। 5 বৎসর পরে তোমার বয়স কত হইবে ?

(ii) তোমার বর্তমান বয়স a বৎসর। x বৎসর পরে তোমার বয়স কত হইবে ?

(i) 5 বৎসর পরে তোমার বয়স হইবে$=(12+5)$ বৎসর
$=17$ বৎসর।

(ii) x বৎসর পরে তোমার বয়স হইবে$=(a+x)$ বৎসর।

উদাহরণ 3. (i) রামের নিকট 20 টাকা, শ্যামের নিকট 30 টাকা এবং যদুর নিকট 40 টাকা আছে। তিন জনের নিকট মোট কত টাকা আছে?

(i) রামের নিকট a টাকা, শ্যামের নিকট b টাকা ও যদুর নিকট c টাকা আছে। তিন জনের নিকট মোট কত টাকা আছে?

(i) এস্থলে : রাম, শ্যাম ও যদুর মোট টাকার পরিমাণ
$=(20+30+40)$ টাকা$=90$ টাকা

(ii) অনুরূপে, রাম, শ্যাম ও যদুর মোট টাকার পরিমাণ
$=(a+b+c)$ টাকা।

উদাহরণ 4. এক ব্যক্তির মাসিক আয় 500 টাকা। তিনি প্রতি মাসে 400 টাকা খরচ করিলে, প্রতি মাসে তাহার কত টাকা জমিবে?

(ii) এক ব্যক্তির মাসিক আয় 500 টাকা। তিনি প্রতিমাসে x টাকা খরচ করিলে, প্রতিমাসে তাহার কত জমিবে?

(iii) এক ব্যক্তির মাসিক আয় a টাকা। তিনি প্রতিমাসে x টাকা খরচ করেন। প্রতিমাসে তাহার কত জমিবে?

(i) লোকটির একমাসে জমা হয়$=(500-400)$ টাকা
$=100$ টাকা।

অনুরূপভাবে, (ii) লোকটির একমাসে জমা হয়
$=(500-x)$ টাকা।

(iii) লোকটির একমাসে জমা হয়$=(a-x)$ টাকা।

উদাহরণ 5. (i) দুইটি সংখ্যার যোগফল 16 ; একটি সংখ্যা 6 হইলে অপরটি কত ?

(ii) দুইটি সংখ্যার যোগফল x ; একটি সংখ্যা y হইলে অপরটি কত ?

(i) নির্ণেয় অপর সংখ্যাটি $=16-6=10$.

অনুরূপভাবে, (ii) নির্ণেয় অপর সংখ্যাটি $=x-y$.

উদাহরণ 6. (i) একটি আয়তাকার উদ্যানের দৈর্ঘ্য 20 মিটার এবং প্রস্থ 16 মিটার হইলে আয়তাকার উদ্যানের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(ii) একটি আয়তাকার উদ্যানের দৈর্ঘ্য a মিটার এবং প্রস্থ b মিটার হইলে আয়তাকার উদ্যানের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

আয়তকার উদ্যানটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইলে, দৈর্ঘ্যর সহিত প্রস্থ গুণ করিতে হইবে।

(i) আয়তাকার উদ্যানের ক্ষেত্রফল $=20$ মিটার $\times 16$ মিটার
$=320$ বর্গমিটার

অনুরূপভাবে, (ii) আয়তাকার উদ্যানের ক্ষেত্রফল
$=a$ মিটার $\times$ b মিটার $=ab$ বর্গমিটার।

উদাহরণ 7. 5 জন বালককে 20 টাকা সমানভাবে ভাগ করিয়া দিলে প্রত্যেক বালক কত টাকা পাইবে ?

প্রত্যেক বালক পাইবে $=20$ টাকা $\div 5=\dfrac{20 \text{ টাকা}}{5}=4$ টাকা।

অনুরূপভাবে বলা যাইতে পারে, x টাকা y জন বালককে সমানভাবে ভাগ করিয়া দিলে প্রত্যেক বালক পাইবে $=\dfrac{x}{y}$ টাকা।

উদাহরণ 8. ভাজক 12, ভাগফল 4 এবং ভাগশেষ 2 হইলে ভাজ্য কত ?

নির্ণেয় ভাজ্য $=(12\times 4)+2=48+2=50.$

অনুরূপভাবে বলা যাইতে পারে, ভাগফল x, ভাজক y এবং ভাগশেষ z হইলে, ভাজ্য হইবে $=(x\times y)+z=xy+z$

এইরূপে পাটীগণিতের বিভিন্ন প্রশ্ন বীজগণিতীয় প্রতীকের সাহায্যে অতি সহজেই সমাধান করা যাইতে পারে।

প্রশ্নমালা 1

1. কোন্ সংখ্যা হইতে 6 বিয়োগ করিলে, x বাকি থাকে ?
2. কোন্ সংখ্যা হইতে a বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 5 হয় ?
3. কোন্ সংখ্যা হইতে a বিয়োগ করিলে বিয়োগফল b হয় ?
4. দুইটি সংখ্যার যোগফল 12 ; একটি x হইলে অপরটি কত ?
5. দুইটি সংখ্যার যোগফল p ; একটি 4 হইলে অপরটি কত ?
6. দুইটি সংখ্যার যোগফল m ; একটি n হইলে অপরটি কত ?
7. একটি সংখ্যা 12 এবং আর একটি সংখ্যা p হইলে সংখ্যা দুইটির গুণফল কত ?
8. দুইটি সংখ্যা a এবং b হইলে উহাদের গুণফল কত ?
9. দুইটি সংখ্যার গুণফল 20 ; একটি a হইলে অপরটি কত ?
10. দুইটি সংখ্যার গুণফল x ; একটি 3 হইলে অপরটি কত ?
11. দুইটি সংখ্যার গুণফল x ; একটি y হইলে অপরটি কত ?
12. তোমার বন্ধুর বর্তমান বয়স 11 বৎসর। x বৎসর পরে তোমার বন্ধুর কত বয়স হইবে ?
13. তোমার দাদার বর্তমান বয়স 18 বৎসর। y বৎসর পূর্বে তোমার দাদার কত বয়স ছিল ?

14. এক ব্যক্তি প্রতিদিন 15 টাকা আয় করেন এবং তিনি প্রতিদিন y টাকা ব্যয় করেন। প্রতিদিন তাঁহার কত জমা থাকে ?

15. এক ব্যক্তি বৎসরে x টাকা আয় করেন এবং প্রতি মাসে তিনি y টাকা ব্যয় করেন। বৎসরে তাহার কত টাকা জমা থাকে ?

16. এক ব্যক্তি প্রতি মাসে x টাকা আয় করেন এবং বৎসরে 5000 টাকা সঞ্চয় করেন। তিনি বৎসরে কত টাকা খরচ করেন ?

17. একটি আমের মূল্য x পয়সা ; 15টি আমের মূল্য কত ?

18. একটি ঘড়ির মুল্য a টাকা হইলে, bটি ঘড়ির মূল্য কত ?

19. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য p মিটার এবং প্রস্থ q মিটার হইলে, আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল কত ?

20. একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল p বর্গমিটার এবং দৈর্ঘ্য a মিটার হইলে, প্রস্থ কত ?

21. একটি থলিতে x টাকা আছে। 20 জন বালককে ঐ টাকা সমানভাবে ভাগ করিয়া দিলে, প্রত্যেকে কত পাইবে ?

22. 5 টাকা x পয়সা ভাঙ্গাইয়া কত পয়সা পাওয়া যাইবে ?

23. এক ব্যক্তি m কিলোগ্রাম 520 গ্রাম গম কিনিলেন। তিনি কত গ্রাম গম কিনিলেন ?

24. এক ব্যক্তি প্রতি ঘণ্টায় x কি.মি. হাঁটিতে পারেন। y কি.মি. হাঁটিতে তাঁহার কত সময় লাগিবে ?

25. ভাজক m, ভাগফল n এবং ভাগশেষ p ; ভাজ্য কত ?

26. x সংখ্যক বালককে কিছু টাকা সমানভাবে ভাগ করিয়া দেওয়ায় প্রত্যেকে y টাকা পাইল এবং ইহাতে আমার নিকট 16 টাকা অবশিষ্ট রহিল। আমার নিকট মোট কত টাকা ছিল ?

27. এক ব্যক্তি প্রতি কিলোগ্রাম 15 টাকা দরের x কিলোগ্রাম চায়ের সহিত প্রতি কিলোগ্রাম 16 টাকা দরের y কিলোগ্রাম চা মিশ্রিত করিলেন। ইহাতে তাঁহার মোট কত টাকা লাগিল ?

28. এক ব্যক্তি তাঁহার মোট ভ্রমণ-পথের x কি. মি. হাঁটিয়া, y কি.মি. সাইকেলে করিয়া এবং সর্বশেষে 16 কি.মি. মোটরযোগে ভ্রমণ করিলেন। তিনি মোট কত কিলোমিটার ভ্রমণ করিলেন ?

প্রতিকল্প স্থাপন

পাটীগণিতের বিভিন্ন প্রশ্নের আলোচনা করিয়া দেখান হইয়াছে যে, বীজগণিতীয় প্রতীকের সাহায্যে ঐ প্রশ্নাবলীর ফল প্রকাশ করা সম্ভবপর হয়। বীজগণিতীয় প্রতীকের পরিবর্তে পাটীগণিতের বিভিন্ন সংখ্যা ব্যবহার করিয়া বীজগণিতীয় রাশির সাংখ্যমান নির্ণয় করিলে বীজগণিতীয় প্রতীকের সংখ্যাত্মক ধারণা প্রথম শিক্ষার্থীদের মনে দৃঢ়তর হইবে। এইরূপ প্রণালীকে বলা হয় **প্রতিকল্প স্থাপন প্রণালী।**

যেমন : কোন প্রশ্নে, উত্তর $3a$ হইল। এক্ষণে a যদি 5 হয় তাহা হইলে, উত্তর $3 \times 5 = 15$ হইবে। a যদি 10 হয় তাহা হইলে, উত্তর $3 \times 10 = 30$ হইবে। ইত্যাদি।

রাশিমালা (Expression) ও পদ (Term) :

কতকগুলি সংখ্যা বা সংখ্যাবোধক অক্ষর লইয়া একটি রাশিমালা গঠন করা হয়।

কোন সংখ্যা বা সংখ্যা-বোধক অক্ষর বা প্রক্রিয়া-বোধক চিহ্ন-সমন্বিত সংখ্যা ও সংখ্যা-জ্ঞাপক প্রতীকের অর্থবোধক বিন্যাসকে বীজগণিতীয় রাশি (Algebraical Expression) বা শুধু রাশি (Expression) বলে। যথা—$a+b$, $a+b+c$, $a+b-c \times d$, $-2a-3b \div 4c \times d+e$ এইগুলির প্রত্যেকটি এক একটি রাশি।

রাশিমালার অন্তর্গত যে যে অংশ যোগ ও বিয়োগ চিহ্নদ্বারা সংযুক্ত, তাহাদিগকে এক একটি পদ (Term) বলে। গুণ এবং ভাগ চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত অক্ষর বা অক্ষরসমূহকে একটিমাত্র পদ বলিয়া বিবেচনা করা হয়।

$4a+5b+3c\times d+f\div e\times m$—এই রাশিমালায় (i) $4a$, (ii) $5b$, (iii) $3c\times d$, (iv) $f\div e\times m$—এই চারিটী পদ রহিয়াছে।

রাশিমালা দুই প্রকার: (1) সরল রাশি (Simple Expression) এবং (2) মিশ্র রাশি (Compound Expression)।

সরল রাশি—যে রাশিতে একটি মাত্র পদ থাকে, তাহাকে একপদ রাশি (Monomial Expression) বা সরল রাশি বলে। যথা—$5a$, $3b\div 4c$, $2a\times 3b\div 4c$ প্রভৃতি।

মিশ্র রাশি—যে রাশিমালায় একাধিক পদবিশিষ্ট রাশি থাকে, তাহাকে মিশ্র রাশি (Compound Expression) বলে।

দ্বিপদ রাশি—যে রাশিমালায় মাত্র দুইটি পদ থাকে, তাহাকে দ্বিপদ রাশি (Binomial Expression) বলে। যথা—$a+b$, $2a+3b\times c$, $a\div c-2b\times c\div d$ প্রভৃতি।

ত্রিপদ রাশি—যে রাশিমালায় তিনটি মাত্র পদ থাকে তাহাকে ত্রিপদ রাশি (Trinomial Expression) বলে। যথা—$a+b+c$, $a+b-c$, $a+b+c\times d$, $a\times b+b\times c+c\div d$ প্রভৃতি।

বহুপদ রাশি—তিনের অধিক পদবিশিষ্ট রাশিকে বহুপদ রাশি (Polynomial Expression) বলে। যথা—$a+b+c+d+e$, $4a+b\div c+cd+ef-3n$ প্রভৃতি।

প্রতিকল্প স্থাপন প্রণালী দ্বারা উপরিউক্ত বিভিন্ন রাশিতে বীজগণিতীয় প্রতীকের সাংখ্যমান ব্যবহার করিয়া বিভিন্ন রাশির প্রকৃত মান নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 1. $a=3$ এবং $b=4$ হইলে, $5a+3b$ এর মান কত ?

$5a+3b=(5.a)+(3.b)=(5.3)+(3.4)=15+12=27.$

উদাহরণ 2. $x=3$, $y=2$ এব, $z=4$ হইলে, $4x-5y+z$-এর মান কত ?

$$4x-5y+z=4.3-5.2+4$$
$$=12-10+4=12+4-10$$
$$=16-10=6.$$

উদাহরণ 3. $a=3, b=4.c=2$ এবং $d=5$ হইলে,

$6ad\div cd+a\times b\div c-5a\div d\times c$-এর মান কত।

$$6ad\div cd+a\times b\div c-5a\div d\times c$$
$$=6.3.5\div 2.5+3\times 4\div 2-5.3\div 5\times 2$$
$$=(90\div 10)+(12\div 2)-(15\div 5\times 2)$$
$$=9+6-6=15-6=9.$$

উদাহরণ 4. $a=6$ এবং $b=7$ হইলে,

$\frac{5a+2b}{4}-\frac{2a+3b}{11}+\frac{6a+7b}{17}$এর মান নির্ণয় কর।

$$\frac{5a+2b}{4}-\frac{2a+3b}{11}+\frac{6a+7b}{17}$$
$$=\frac{5.6+2.7}{4}-\frac{2.6+3.7}{11}+\frac{6.6+7.7}{17}$$
$$=\frac{30+14}{4}-\frac{12+21}{11}+\frac{36+49}{17}$$
$$=\frac{44}{4}-\frac{33}{11}+\frac{85}{17}$$
$$=11-3+5=11+5-3$$
$$=16-3=13.$$

প্রশ্নমালা 2

$a=8$, $b=4$ এবং $c=2$ হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

1. $a+b.$
2. $a+b-c.$
3. $a-b+c.$
4. $\dfrac{2a-b-c}{a\times c-b}.$
5. $a\times b+c.$
6. $a-b\times c.$
7. $2a\div 4b\times c.$
8. $a\div b\times 2c.$
9. $2a+2b\times 3c.$
10. $a\div b+4c\div a.$
11. $a+b+4c\div b.$
12. $6ab+2b+4b\div a.$
13. $100\div b+6c-3-a\div b.$
14. $4b\div a\times c\times 3b-64\div 2a\times c.$
15. $abc\div 16+4bc\div 2a\times 3+2a\times b.$
16. $4ab\div 8c\times b-b\times 2c\div 4-2\times b\div 2c+5b-6c.$
17. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$
18. $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$
19. $\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}$
20. $\dfrac{1}{2c}+\dfrac{1}{b}$
21. $\dfrac{a}{2b}+\dfrac{b}{3c}$
22. $\dfrac{b+c}{c}+\dfrac{b-c}{a}$
23. $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{4b}$
24. $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{4b}{ca}+\dfrac{ca}{4b}$

$x=3$, $y=4$, $z=6$, $a=2$, $b=1$ এবং $c=5$ হইলে; নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

25. $x+y\div a\times c+az\div y\times x.$

26. $2x+3y+6c\div z\times a.$

27. $8a+3x\times z\times y\times yz\div x+16$

28. $xyz+4c\div y\times z-bx\times y\div z+3a.$

29. $ax-by+cz-xy+4z\times 5\div 2c.$

30. $\frac{a}{z}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$ 31. $\frac{2x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{5z}{c}$

32. $\frac{ab}{z}+\frac{bc}{y}+\frac{ca}{z}+\frac{abc}{xyz}$

33. $4\times\frac{z-y}{y}+6\times\frac{z-x}{z}-3\times\frac{y-x}{x}$

34. $\frac{4x+5y}{a+z}-\frac{4y+6a}{x+y}+\frac{10b+8c}{y+z}$

35. $\frac{4c+5b}{a+x}+\frac{2c+2y}{a+y}-\frac{3c+3x}{a+z}$

দ্বিতীয় অধ্যায়

ধনাত্মক ও ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

[Number System—Integers—Positive and Negative]

স্বাভাবিক সংখ্যা—আমরা দৈনন্দিন জীবনে 1, 2, 3, 4, 5...... প্রভৃতি সংখ্যা স্বাভাবিক গণনার জন্য ব্যবহার করিয়া থাকি। তাই ইহাদিগকে স্বাভাবিক সংখ্যা বলা হয়। যেমন : 5 কিলোগ্রাম চাল, 10 মিটার দীর্ঘ রজ্জু, 100-টি টাকা ইত্যাদির সাহায্যে যথাক্রমে চালের পরিমাণ, রজ্জুর দৈর্ঘ্য এবং অর্থের পরিমাণ নির্দেশিত হইতেছে। উক্ত তিনটি বস্তুর পরিমাণ নির্দেশ করার জন্য 5, 10, 100 এই তিনটি সংখ্যার সাহায্য লইতে হইয়াছে। এইগুলি স্বাভাবিক সংখ্যার অন্তর্গত।

বীজগণিতে ব্যবহৃত সংখ্যা—মূলদ সংখ্যা ও অমূলদ সংখ্যা—

বীজগণিতে ব্যবহৃত সংখ্যাগুলি প্রধানতঃ দুই প্রকার। যথা—(ক) মূলদ সংখ্যা ও (খ) অমূলদ সংখ্যা।

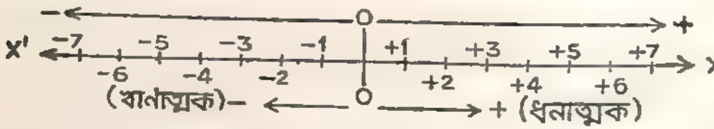
যে সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাত রূপে প্রকাশ করা যায়, তাহাকে মূলদ সংখ্যা বলে যেমন : 8, 22, $\frac{1}{2}$, $\frac{97}{11}$, $\frac{17}{33}$ ইত্যাদি।

যে সংখ্যার মূল সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা যায় না তাহাদিগকে অমূলদ সংখ্যা বলে। যেমন $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ ইত্যাদি।

অখণ্ড সংখ্যা (Integers) :—1, 2, 3, 4, ইত্যাদি স্বাভাবিক সংখ্যাকে ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা বলা হয়। পূর্বেই জানিয়াছ, মূলদ সংখ্যাগুলিকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশিত করা যায়। যখন $\frac{p}{q}$ আকারে

প্রকাশিত ধনাত্মক সংখ্যাগুলিতে q-এর মান 1 হয়, তখন ঐ সংখ্যাগুলিকে ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা বলা হয়।

অখণ্ড সংখ্যাগুলি দুই প্রকার ; ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। নিম্নে একটি সংখ্যার স্কেল (Number Scale) দেওয়া হইল।



ইহার 0-র ডানদিকের অবস্থান ধনাত্মক এবং বামদিকের অবস্থান ঋণাত্মক। শূন্যের ডানদিকে স্বাভাবিক সংখ্যাগুলিকে ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা (Positive Integers) এবং শূন্যের বামদিকে '−' চিহ্ন সমন্বিত অখণ্ড সংখ্যাগুলিকে ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা (Negative Integers) বলে। ইহারা 0 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

যেমন, -5, -8, -9 ইত্যাদি। সুতরাং, $-5<0$, $-8<0$ ইত্যাদি।

মনে কর, একজন ব্যক্তির মাসিক আয় 450 টাকা। তিনি প্রত্যহ নগদ মূল্য দিয়া বাজারের জিনিস খরিদ করেন কিন্তু অবশিষ্ট জিনিস এক মুদির দোকান হইতে ধারে আনেন। মাসের শেষে দেখিলেন তাঁহার কাছে টাকা নাই, অথচ মুদি তাঁহার নিকট হইতে 100 টাকা পাইবে।

তথ্যটি এইরূপে প্রকাশ করিতে পারি। লোকটির এক মাসে মোট আয় $=450$ টাকা এবং মোট খরচ $=$ মুদির দোকানের দ্রব্যের জন্য 100 টাকা $+$ বাজার খরচ 450 টাকা $=550$ টাকা।

লোকটির মাসিক মোট আয় (450 টাকা) অপেক্ষা মাসিক মোট ব্যয় (550 টাকা) বেশী। অতএব মাসের শেষে লোকটির 100

টাকা ঋণ হইতেছে। 'ঋণ' কথাটি, 'জমা' বা উদ্বৃত্ত' টাকার বিপরীত অর্থ প্রকাশ করিতেছে। জমা দ্বারা ধনাত্মক অর্থ প্রকাশিত হয় এবং 'ঋণ' বা 'দেনা' দ্বারা ঋণাত্মক অর্থ প্রকাশিত হয়। বীজ-গণিতের ভাষায় উক্ত 100 টাকা ঋণকে -100 টাকা সঞ্চয়ও বলিতে পারি অনুরূপ ভাবে, লাভ এবং ক্ষতি, পূর্ব এবং পশ্চিম, উত্তর এবং দক্ষিণ, উর্ধ্ব এবং অধঃ বিপরীত-বোধক। '+' দ্বারা লাভ বুঝাইলে '−' দ্বারা ক্ষতি বুঝাইবে।

নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা : আমরা সাধারণতঃ গাণিতিক প্রক্রিয়ায় যোগ করা এবং বিয়োগ করা অর্থে '+' এবং '−' চিহ্ন ব্যবহার করিয়া থাকি। '+' চিহ্ন সমন্বিত সংখ্যাকে **ধনাত্মক সংখ্যা** এবং '−' চিহ্ন সমন্বিত সংখ্যাকে **ঋণাত্মক সংখ্যা** বলা হয়। বীজগণিতে '+' অথবা '−' চিহ্ন সমন্বিত যে সকল সংখ্যা যোগ এবং বিয়োগ প্রক্রিয়া না বুঝাইয়া বিশেষ অর্থে প্রযুক্ত হয়, তাহাদিগকে নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা (Directed number) বলা হয়। যেমন $+7$ (বা, 7) হইল এমন একটি সংখ্যা যাহা 0 হইতে 7 বেশী এবং -7 হইল এমন একটি সংখ্যা যাহা 0 হইতে 7 কম। 14 পৃষ্ঠার সংখ্যার স্কেলের চিত্র দেখ।

বীজগণিতে রাশিগুলি সবই নিয়ন্ত্রিত রাশি বা সংখ্যা। রাশির পূর্বে '+' বা '−' চিহ্ন না থাকিলে রাশির অর্থ সম্পূর্ণ প্রকাশিত হয় না। কোন রাশির পূর্বে কোন চিহ্ন না থাকিলে উহার পূর্বে '+' চিহ্ন উহ্য আছে বলিয়া ধরা হয়। চিহ্ন নিরপেক্ষ সংখ্যার মানকে পরমমান (Absolute Value) বলে। ইহাকে নিম্নলিখিত ভাবে প্রকাশ করা হয়। $|-20|$ এবং $|+20|$; উভয়েরই পরমমান '20'। সেইরূপ x এর মান অখণ্ড সংখ্যা হইলে x এবং $-x$ উভয়েরই পরমমান x এবং উহাকে $|x|$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। আবার x-এর

মান যদি 2 এবং y-এর মান যদি 3 হয়, তাহা হইলে $+\ (xy)$ এবং $-(xy)$ উভয়েরই পরমমান 6 হইবে।

উদাহরণ 1. -30 টাকা ক্ষতি $=30$ টাকা লাভ।

2. -250 টাকা ব্যয় $=250$ টাকা আয়।

3. খড়্গপুর হইতে -50 কি.মি. পশ্চিমে $=$ খড়্গপুর হইতে 50 কি.মি. পূর্বে।

4. কোন স্থান হইতে -3 মিটার উচ্চে $=$ ঐ স্থান হইতে 3 মিটার নিম্নে।

5. রাম তাহার পিতা অপেক্ষা -25 বৎসর বড় $=$ রাম তাহার পিতা অপেক্ষা 25 বৎসরের ছোট।

প্রশ্নমালা 3

প্রয়োজন মত '+' অথবা '−' চিহ্ন বসাও :

1. 15 টাকা লাভ ; 40 টাকা ক্ষতি।
2. খড়্গপুর হইতে 40 কি. মি পূর্বে, 50 কি. মি. পশ্চিমে।
3. মাসিক আয় 100 টাকা বাড়িল, 40 টাকা কমিল।
4. ঘরের ছাদ হইতে 15 মিটার উপরে, 30 মিটার নিম্নে।
5. সকাল ছয়টার 30 মিনিট পূর্বে, 40 মিনিট পরে।
6. মধ্যাহ্নের 2 ঘণ্টা পরে, 2 ঘণ্টা পূর্বে।
7. মধ্য রাত্রির 4 ঘণ্টা আগে, 4 ঘণ্টা পরে।
8. কলিকাতা হইতে 70 কি.মি. উত্তরে, 40 কি.মি. দক্ষিণে।
9. A হইতে B পাইয়াছে 15 নম্বর বেশী, C পাইয়াছে 10 নম্বর কম।

নিম্নে কতকগুলি পরমমান দেওয়া হইল। বিষয়টি পড়িয়া উহাদের পূর্বে উপযুক্ত ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্ন বসাও।

10. একটি ট্রেন খড়্গপুর হইতে 30 কি.মি. উত্তরে গেল। ট্রেনটি খড়্গপুর হইতে কত কি.মি. দক্ষিণে গেল ?

11. ফুটবল খেলায় আমরা একটি টীমকে 2–0 গোলে পরাজিত করিলাম। আমরা কত গোলে পরাজিত হইলাম ?

12. একটি ঘড়ি 100 টাকায় বিক্রয় করিলে –10 টাকা লাভ হয়। ঘড়িটি 120 টাকায় বিক্রয় করিলে কত লোকসান হয় ?

13. একটি ঘোড়া 1200 টাকায় বিক্রয় করিলে—100 টাকা লাভ হয়। ঘোড়াটি 1000 টাকায় বিক্রয় করিলে কত টাকা লাভ হইবে ?

14. একটি স্থান সমুদ্র-পৃষ্ঠ হইতে 800 মিটার উপরে। স্থানটি সমুদ্র-পৃষ্ঠ হইতে কত মিটার নিম্নে ?

15. একটি স্থানের অক্ষাংশ বিষুবরেখা হইতে –20 ডিগ্রী উত্তরে। স্থানটি বিষুবরেখা হইতে কত ডিগ্রী দক্ষিণে ?

16. আমার বয়স 14 বৎসর। আমার দাদার বয়স 18 বৎসর। আমি আমার দাদা অপেক্ষা কত বছরের বড় ?

17. একটি স্থানের তাপমাত্রা সকালে 96° ফা. দুপুরে 99° ফা. এবং সন্ধ্যায় 95° ফা. স্থানটির তাপমাত্রা দুপুরের তুলনায় সকালে কত বেশী এবং সন্ধ্যার তুলনায় সকালে কত কম ?

18. $*$স্থানে $>$, $=$ বা $<$ চিহ্ন বসাও :

(i) $+240*+150$ (ii) $-240*+150$

(iii) $-4*-1$ (iv) $0*200$ (v) $0*-200$

(vi) $-210*+210$ (vii) $|112|*|100|$

(viii) $|112|*|-100|$ (ix) $|-112|*|100|$

19. যদি a ও b দুইটি ধনরাশি এবং m ও n দুইটি ঋণরাশি হয়, তাহা হইলে $*$ স্থানে $>$, $=$ বা $>$ চিহ্ন বসাও :

(i) $o*a$ (ii) $a*o$ (iii) $m*o$ (iv) $o*n$ (v) $a*m$

(vi) $m*a$ (vii) $m*b$ (vii) $n*b$ (viii) $b*n$ (ix) $o*b$

20. ক্রম-উর্ধ্ব মানানুসারে সাজাও :

(i) $+9, -40, -13, 0, +1, -7$ এবং $+7$

(ii) $-25, -30, +29, 0, +5, -2, +1$ এবং -1

তৃতীয় অধ্যায়

অখণ্ড ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ এবং ভাগ

[Basic operation on Integers.]

অখণ্ড সংখ্যার যোগ ঃ

উদাহরণ 1. মনে কর, $+6$ এবং $+8$ যোগ করিতে হইবে। 6 এবং 8 দুইটিই ধনাত্মক সংখ্যা। এইভাবে চিন্তা করা যাইতে পারে। আমি বাবার নিকট হইতে 6 টাকা এবং দাদার নিকট হইতে 8 টাকা পাইলাম। অতএব আমার মোট 14 টাকা হইল।

অর্থাৎ, $(+6)+(+8)=+14.$

তদ্রূপ, $(+6a)+(+8a)=+14a$

উদাহরণ 2. মনে কর, -10 এবং $+26$ যোগ করিতে হইবে।

এই ক্ষেত্রে একটি সংখ্যা ঋণাত্মক এবং অপরটি ধনাত্মক। কল্পনা করিতে পারি, আমার বন্ধুর নিকট হইতে 10 টাকা ঋণ করিয়াছিলাম। পরে বাবার নিকট হইতে 26 টাকা পাইলাম এবং তাহা হইতে পূর্বে যে 10 টাকা ধার করিয়াছিলাম, সেই 10 টাকা বন্ধুকে ফেরত দিলাম। অতএব, আমার নিকট 16 টাকা থাকিল।

সুতরাং, $(-10)+(+26)=+16.$

তদ্রূপ, $(-10a)+(26a)=+16a$

উদাহরণ 3. মনে কর, -13 এবং -17 যোগ করিতে হইবে। দুইটি সংখ্যাই ঋণাত্মক। মনে করি যে, আমি রামের নিকট হইতে 13 টাকা এবং যদুর নিকট হইতে 17 টাকা ঋণ করিলাম। সুতরাং মোট ঋণ করিলাম 30 টাকা। ঋণ করা '$-$' চিহ্নের পরিচায়ক।

অতএব, $(-13)+(-17)=-30.$

তদ্রূপ, $(-13a)+(-17a)=-30a.$

যোগফল সংক্রান্ত নিয়ম :

(*i*) শুধু ধনাত্মক অখণ্ড রাশির যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে উহাদের পরমমান যোগ করিয়া যোগফলের পূর্বে '+' চিহ্ন দিতে হয়।

(*ii*) একটি ধনাত্মক সংখ্যার সহিত একটি ঋণাত্মক সংখ্যা যোগ করিতে হইলে উহাদের পরমমানদ্বয়ের অন্তরের পূর্বে বৃহত্তর পরমমান বিশিষ্ট সংখ্যাটির চিহ্নটি বসাইতে হয়। দুইটির অধিক কতিপয় ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সংখ্যার যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে, ধনাত্মক সংখ্যাগুলির পরমমান এবং ঋণাত্মক সংখ্যাগুলির পরমমান পৃথক্ পৃথক্ ভাবে যোগ করিয়া যোগফলদ্বয়ের বৃহত্তরটি হইতে ক্ষুদ্রতরটি বিয়োগ করিয়া প্রাপ্ত বিয়োগফলের পূর্বে, বৃহত্তর পরমমান বিশিষ্ট পদের যোগফলের পূর্বে যে চিহ্ন থাকে, সেই চিহ্ন বসাইতে হয়।

(*iii*) শুধু ঋণাত্মক সংখ্যার যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে উহাদের পরমমানগুলির যোগপ্রাপ্ত যোগফলের পূর্বে '−' চিহ্ন বসাইতে হয়।

অখণ্ড সংখ্যার বিয়োগ :

বিয়োগ প্রক্রিয়া যোগের বিপরীত। যাহা বিয়োগ করা হয়, তাহা বিয়োজ্য এবং যাহা হইতে বিয়োগ করা হয়, তাহাকে বিয়োজন বলে

উদাহরণ 1. $+21$ হইতে $+17$ বিয়োগ কর।

মনে কর, তোমার 21টি মার্বেল আছে। তাহা হইতে তুমি 17টি মার্বেল তোমার ভাইকে দিলে। অতএব, তোমার নিকট মার্বেল রহিল 4টি।

সুতরাং, $(+21)-(+17)=4.$

তদ্রূপ, $(+4a)-(+2a)=2a.$

97

উদাহরণ 2. (-25) হইতে (-32) বিয়োগ কর।

মনে কর, তুমি ধারে 25 পয়সার একটি সন্দেশ খাইলে। পরে তুমি বাড়ী হইতে 32 পয়সা আনিয়া দোকানীর 25 পয়সা মিটাইয়া দিলে। এখন তোমার নিকট 7 পয়সা রহিল।

অতএব, $(-25)-(-32)=+7.$

তদ্রূপ, $(-25a)-(-32a)=+7a$

এখানে লক্ষ্য কর, $-(-32)$ এর অর্থ $+32$, কারণ $-(-32$ পয়সা) ধার $= +32$ পয়সা জমা।

বিয়োগফল সংক্রান্ত নিয়ম :

উপরের উদাহরণগুলি হইতে দেখা যাইতেছে যে, একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইতে অপর কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সংখ্যা বিয়োগ করিতে হইলে, বিয়োজ্যের চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া (অর্থাৎ + কে − এবং − কে + চিহ্নে পরিবর্তিত করিয়া) উহাকে বিয়োজনের সহিত যোগ করিলেই নির্ণেয় বিয়োগফল পাওয়া যায়।

অখণ্ড সংখ্যার গুণন :

গুণন হইল যোগের সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়া।

উদাহরণ 1. $(+13)$ কে $(+4)$ দ্বারা গুণ কর।

মনে কর, একজন প্রত্যহ 13 টাকা উপার্জন করে। অতএব সে 4 দিনে উপার্জন করিবে $(+13)\times(+4)$ টাকা $=+52$ টাকা।

$$\therefore \quad (+13)\times(+4)=52.$$

উদাহরণ 2. (-6) কে $(+4)$ দ্বারা গুণ কর।

মনে কর, এক ব্যক্তি প্রত্যহ -6 টাকা আয় করে, অর্থাৎ প্রত্যহ 6 টাকা ব্যয় করে। অতএব, সে 4 দিনে ব্যয় করে, (6×4) টাকা $=$ 24 টাকা, অর্থাৎ সে 4 দিনে আয় করে (-24) টাকা।

$$\therefore \quad (-6)\times(4)=(-24).$$

উদাহরণ 3. (-40) কে (-3) দ্বারা গুণ কর।

মনে কর, এক ব্যক্তি প্রতিমাসে -40 টাকা জমা করে অর্থাৎ প্রতিমাসে 40 টাকা ঋণ করে। এক্ষেত্রে নির্ণয় করিতে হইবে যে, সে (-3) মাস পরে কত টাকা ঋণ করিবে। (-3) মাস পরের অর্থ $(+3)$ মাস পূর্বে। 3 মাস পূর্বে তাহার ঋণের পরিমাণ $(+40)$ টাকা $\times (+3) = +120$ টাকা কম ছিল, অর্থাৎ জমার হিসাবে তাহার 120 টাকা বেশী ছিল।

সুতরাং, $(-40) \times (-3) = +120$.

গুণনের নিয়ম :

(*i*) একটি ধনাত্মক রাশিকে অপর একটি ধনাত্মক রাশি দ্বারা গুণ করিলে গুণফল ধনাত্মক হয়।

(*ii*) একটি ধনাত্মক রাশিকে অপর একটি ঋণাত্মক রাশি দ্বারা অথবা একটি ঋণাত্মক রাশিকে অপর একটি ধনাত্মক রাশি দ্বারা গুণ করিলে গুণফল ঋণাত্মক হয়।

(*iii*) একটি ঋণাত্মক রাশিকে অপর একটি ঋণাত্মক রাশি দ্বারা গুণ করিলে গুণফল ধনাত্মক হয়।

অখণ্ড সংখ্যার ভাগ :

ভাগ প্রক্রিয়া গুণনের বিপরীত। একটি সংখ্যাকে অপর একটি সংখ্যার দ্বারা ভাগ করার অর্থ হইল—প্রথম সংখ্যাকে দ্বিতীয় সংখ্যার অন্যোন্যক দ্বারা গুণ করা। [একটি সংখ্যার অন্যোন্যক হইল এমন একটি সংখ্যা, যাহাকে ঐ সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে গুণফল 1 হয়। যেমন—a-র অন্যোন্যক $\frac{1}{a}$.]

উদাহরণ 1. (+39)কে (+3) দ্বারা ভাগ কর।

$$(+39)\div(+3)=(+39)\times(+\tfrac{1}{3})=+13.$$

উদাহরণ 2. (+99)কে (−11) দ্বারা ভাগ কর।

$$(99)\div(-11)=(99)\times(-\tfrac{1}{11})=-9$$

উদাহরণ 3. −128কে −32 দ্বারা ভাগ কর।

$$(-128)\div(-32)=(-128)\times(-\tfrac{1}{32})=4.$$

গুণন সম্পর্কে চিহ্ন সংক্রান্ত যে নিয়মগুলির উল্লিখিত হইয়াছে, ভাগের ক্ষেত্রেও সেই নিয়মগুলি প্রযোজ্য হয়।

প্রশ্নমালা 4

1. যোগ কর :

(i) (+1) এবং (+20) (ii) (+91) এবং (−37)
(iii) (−23) এবং (+36) (iv) (−96) এবং (−53)
(v) (−112) এবং (−120) (vi) (340) এবং (−727)

2. বিয়োগ কর :

(i) (+43) হইতে (+25) (ii) (−12) হইতে (+7)
(iii) (+91) হইতে (+300) (iv) (−247) হইতে (−37)
(v) (−24) হইতে (+169) (vi) (−589) হইতে (+411)

3. গুণ কর :

(i) (+23) কে (+7) দ্বারা। (ii) (+34) কে (−19) দ্বারা।
(iii) (−30) কে (+51) দ্বারা। (iv) (−21) কে (−11) দ্বারা।
(v) (−12) কে (+201) দ্বারা। (vi) (−66) কে (−25) দ্বারা।

4. ভাগ কর :

(i) (+69) কে (−3) দ্বারা। (ii) (−481)কে (+37) দ্বারা।
(iii) (+432)কে(−24)দ্বারা। (iv) (−207)কে(−9) দ্বারা।
(v) (−672)কে (+42) দ্বারা। (vi)(+804)কে(−67) দ্বারা।

5. $a=2$, $b=-3$, $c=-4$ এবং $d=5$ হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর ঃ

(i) $a+b+c$. (ii) $a-b+c$. (iii) $a+b+c-d$.
(iv) $a-b+c-d$. (v) $2a-b+c-d$. (vi) $5a+b+c+2d$.

6. $x=2$ এবং $y=-3$ হইলে $2x+3y+16$ এবং $4x-2y-14$-এর মান কত ?

7. $x=1$, $y=-2$ এবং $z=-3$ হইলে $-2x$, $3y$, $-6z$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

8. $a=1$, $b=-2$, $c=5$, $d=-4$ হইলে $a+2b-3c-2ab+5cd$-এর মান নির্ণয় কর।

চতুর্থ অধ্যায়

বীজগণিতীয় সংযোগ, বিচ্ছেদ, বিনিময় প্রভৃতি নিয়মের ব্যবহার এবং বন্ধনীর প্রয়োগ

[Laws—Associative, Distributive etc. (use of brackets.)]

বীজগণিতীয় রাশি বা রাশিমালায় বিনিময় নিয়ম, সংযোগ নিয়ম, সূচক নিয়ম প্রভৃতি প্রয়োগ করিয়া বীজগণিতীয় রাশি বা রাশিমালার যোগ, বিয়োগ, গুণন ও ভাগ প্রভৃতি প্রক্রিয়া সম্পন্ন করা হয়। এই সমস্ত নিয়মের প্রয়োগ-বিধি দেখাইবার পূর্বে সহগ এবং সদৃশ ও অসদৃশ রাশি সম্বন্ধে কয়েকটি কথা বলা প্রয়োজন।

সহগ (Co-efficient) : কোন বীজগণিতীয় রাশির পূর্বে গুণকরূপে অবস্থিত অঙ্ক, অক্ষর, বা উভয়কে সেই রাশির পরবর্তী অংশের সহগ বলে। যথা—

(i) $5 \times x = 5x$, এখানে 5 হইতেছে x এর সহগ।

(ii) $a \times b = ab$; এখানে a হইতেছে b এর সহগ।

(iii) $5 \times a \times b \times c = 5abc$; এখানে 5 হইতেছে abc এর সহগ, $5a$ হইতেছে bc এর সহগ $5ab$ হইতেছে c এর সহগ।

সহগ দুই প্রকার : (a) সংখ্যাত্মক সহগ (Numerical Co-efficient) এবং (b) আক্ষরিক সহগ (Literal Co-efficient)।

কোন বীজগণিতীয় রাশির পূর্বে অবস্থিত, পাটীগণিতীয় সংখ্যায় প্রকাশিত উৎপাদকগুলিকে বলে সংখ্যাত্মক সহগ এবং বীজগণিতীয় অক্ষর দ্বারা প্রকাশিত সহগকে বলে আক্ষরিক সহগ। যথা—

$5abc$, এখানে 5 হইতেছে abc-এর সংখ্যাত্মক সহগ ; কিন্তু ab এই রাশিটিতে a হইতেছে b-এর আক্ষরিক সহগ।

আবার x এর সংখ্যাত্মক সহগ হইতেছে 1, কারণ $x=1\times x$, কিন্তু এই 1 লিখিতে হয় না। কোন বীজগণিতীয় রাশির সংখ্যাত্মক সহগের উল্লেখ না থাকিলে উহার সহগ 1 ধরিয়া লইতে হয়। x, xy, abc এই রাশিগুলির প্রত্যেকটির সংখ্যাত্মক সহগ $=1$ (এক).

সদৃশ রাশি এবং অসদৃশ রাশি (Like terms and Unlike terms): দুই বা ততোধিক বীজগণিতীয় রাশির সংখ্যাত্মক অংশগুলি ভিন্ন ভিন্ন হওয়া সত্ত্বেও যদি আক্ষরিক অংশগুলি একইরূপ হয়, তাহা হইলে রাশিগুলিকে বলে সদৃশ রাশি। আক্ষরিক অংশগুলি যদি ভিন্ন ভিন্ন হয়, তবে এইরূপ রাশিগুলিকে বলে অসদৃশ রাশি। যথা—$5x$, $3x$, $9x$, x—ইহারা সদৃশ রাশি।

$7x^2yz$, $3x^2yz$, $4x^2yz$—ইহারা সদৃশ রাশি।

কিন্তু $2xy$, $2x^2y$, $2xy^2$—ইহারা অসদৃশ রাশি।

যোগ (Addition)

একাধিক রাশি একত্র করিলে কি ফল হয়, তাহা নির্ণয় করিবার প্রণালীকে যোগ বলে। যে সকল রাশিকে একত্র করা হয়, তাহাদিগের প্রত্যেকটিকে যোজ্য রাশি (Summands) বলে এবং যে ফল পাওয়া যায়, তাহাকে যোগফল বা সমষ্টি (Sum) বলে।

বীজগণিতে যোজ্য রাশিগুলি শুধু ধনরাশি, বা শুধু ঋণরাশি অথবা ধন ও ঋণ উভয় প্রকারের রাশি হইতে পারে। স্ব স্ব চিহ্নসহ সমস্ত যোজ্য রাশির যোগফলকে বীজগণিতীয় যোগফল (Algebraical sum) বলে।

সদৃশ একপদ ধনরাশির যোগ :

উদাহরণ 1. (a) $2a$, $3a$, $5a$-এর যোগফল কত ?

(b) $5a^2bc$, $6a^2bc$, $8a^2bc$-এর যোগফল কত ?

(a) নির্ণেয় যোগফল $= 2a + 3a + 5a = (2+3+5)a$
$= 10a.$

(b) নির্ণেয় যোগফল $= 5a^2bc + 6a^2bc + 8a^2bc$
$= (5+6+8)a^2bc = 19a^2bc.$

রাশিগুলির সংখ্যাত্মক সহগ যোগ করিয়া যোগফল আক্ষরিক সহগের বাম পার্শ্বে বসাইলেই নির্ণেয় যোগফল পাওয়া যায়।

সদৃশ একপদ ঋণ রাশির যোগ :

উদাহরণ 2. (a) $-x, -5x, -6x, -8x$ এর যোগফল কত ?

(b) $-2ab, -5ab$ এবং $-8ab$ এর যোগফল কত ?

(a) নির্ণেয় যোগফল $= (-x) + (-5x) + (-6x)$
$+ (-8x) = -(1+5+6+8)x = -(20)x = -20x.$

(b) নির্ণেয় যোগফল $= (-2ab) + (-5ab) + (-8ab)$
$= -(2+5+8)ab = -15ab$

সদৃশ ঋণ-রাশিগুলির সংখ্যাত্মক সহগ যোগ তাহার পূর্বে '$-$' চিহ্ন দিলে এবং রাশিগুলির সাধারণ আক্ষরিক সহগটিকে ঐ যোগফলের ডান পার্শ্বে বসাইলেই নির্ণেয় যোগফল পাওয়া যায়।

সদৃশ একপদ ধন ও ঋণ রাশির যোগ :

উদাহরণ 3. (a) $3y, -5y, -8y, 4y$ এর যোগফল কত ?

(b) $-5x^2y^2, 6x^2y^2, -9x^2y^2$ এবং $10x^2y^2$ এর যোগফল কত ?

(a) নির্ণেয় যোগফল $= (3y) + (-5y) + (-8y) + (4y)$
$= (3y + 4y) + (-5y - 8y) = 7y + (-13y) = -6y.$

(b) নির্ণেয় যোগফল $=(-5x^2y^2)+(6x^2y^2)+(-9x^2y^2)$
$+(10x^2y^2)=(6x^2y^2+10x^2y^2)+(-5x^2y^2-9x^2y^2)$
$=16x^2y^2+(-14x^2y^2)=2x^2y^2.$

ধনরাশিগুলির সমষ্টি এবং ঋণ রাশিগুলির সমষ্টি পৃথক পৃথক নির্ণয় করিয়া বৃহত্তর পরমমান বিশিষ্ট পদের সমষ্টি হইতে ক্ষুদ্রতর পরমমান বিশিষ্ট পদের সমষ্টি বিয়োগ করিতে হয় এবং বৃহত্তর পরমমান বিশিষ্ট সমষ্টির পদের পূর্বে যে চিহ্ন থাকে, প্রাপ্ত বিয়োগফলের পূর্বে সেই চিহ্ন বসাইলেই নির্ণেয় যোগফল পাওয়া যায়।

যোগের সংযোগ নিয়ম (Associative Law of Addition) :

কতকগুলি রাশিকে পর পর যোগ করিয়া গেলে যে যোগফল পাওয়া যায়, রাশিগুলিকে ইচ্ছামত সংঘবদ্ধ করিয়া যোগ করিলে একই যোগফল পাওয়া যায়। যোগের এই নিয়মকে যোগের সংযোগ নিয়ম (Associative Law of Addition) বলে।

উদাহরণ 4. $2+9+5$ এর যোগফল কত ?

পর পর যোগ করিলে $2+9+5=16$

আবার, $(2+9)+5=11+5=16.$

আবার, $(2)+(9+5)=2+14=16.$

সেইরূপ, $2x+9x+5x=$ কত ?

$(2x+9x)+5x=11x+5x=16x.$

$2x+(9x+5x)=2x+14x=16x.$

যোগের বিনিময় নিয়ম (Commutaive Law)

কতকগুলি রাশিকে পর পর যোগ করিয়া গেলে যে যোগফল পাওয়া যায়, রাশিগুলিকে সুবিধামত 'সাজাইয়া' যোগ করিলেও সেই একই যোগফল পাওয়া যায়। ইহাকে যোগের বিনিময় সূত্র বলে।

উদাহরণ 5. $2a-6a+8a$ এর যোগফল কত ?

যোগফল $=(2a-6a)+8a=-4a+8a=4a$.

ক্রমপরিবর্তন করিয়া, $2a+8a+(-6a)=10a-6a=4a$.

বা, $(-6a)+(8a+2a)=-6a+10a=4a$.

অসদৃশ একপদ রাশির যোগ :

মনে করি বাড়ীতে 5টি চেয়ার ও 7টি টেবিল আছে। চেয়ার ও টেবিল অসদৃশ বস্তু। ইহাদের যোগ করিতে হইলে বীজগণিতের সাহায্য নিতে হইবে। এ ক্ষেত্রে যোজ্য রাশিগুলিকে স্ব-স্ব চিহ্নসহ পাশাপাশি রাখিলেই বীজগণিতীয় সমষ্টি পাওয়া যায়।

উদাহরণ 6. $3x$ এবং $7y$ যোগ কর।

নির্ণেয় যোগফল $=3x+7y$. (অর্থাৎ 3টি চেয়ার + 7টি টেবিল)

উদাহরণ 7. $5x$, $3y$ এবং $-8z$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

নির্ণেয় যোগফল $=(5x)+(3y)+(-8z)$

$=5x+3y-8z$.

বিয়োগ (Subtraction)

একটি রাশি হইতে অপর একটি রাশি বিয়োগ করিলে যে ফল পাওয়া যায়, তাহাকে বিয়োগফল বা অন্তর (Remainer বা, Difference) বলে। যে রাশি হইতে বিয়োগ করা হয় তাহাকে

বিয়োজন (Minuend) এবং যে রাশি বিয়োগ করা হয়, তাহাকে বিয়োজ্য (Subtrahend) বলে। যথা—

$$10-6=4\,;\ 12x-8x=4x.$$

উপরের উদাহরণগুলিতে বিয়োজন হইতেছে 10 এবং $12x$, বিয়োজ্য হইতেছে 6 এবং $8x$, এবং বিয়োগফল হইতেছে 4 এবং $4x$.

সুতরাং, বিয়োজ্য + বিয়োগফল = বিয়োজন।

বীজগণিতে বিয়োগের অর্থ : কোন একটি রাশি হইতে একটি ধনরাশি বিয়োগ করা এবং উহার সহিত সমান পরমমান বিশিষ্ট একটি ঋণরাশি যোগ করা—উভয়ই এক। আবার, কোন একটি রাশি হইতে একটি ঋণরাশি বিয়োগ করা এবং উহার সমান পরমমান বিশিষ্ট একটি ধনরাশি যোগ করা উভয়ই এক।

উদাহরণ 1. $17ax$ হইতে $5ax$ বিয়োগ কর।

নির্ণেয় বিয়োগফল $=17ax-5ax=17ax+(-5ax)$

$$=(17-5)ax=12ax.$$

উদাহরণ 2. $5a^2x^2$ হইতে $-3a^2x^2$ বিয়োগ

নির্ণেয় বিয়োগফল $=(5a^2x^2)-(-3a^2x^2)$

$$=5a^2x^2+3a^2x^2=8a^2x^2.$$

অথবা, বিয়োজন $=5a^2x^2$

বিয়োজ্য $=-3a^2x^2$

+

নির্ণেয় বিয়োগফল $=8a^2x^2$.

উপরের উদাহরণগুলি হইতে দেখা যাইতেছে যে, বিয়োগের অর্থ, বিয়োজ্যের চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া বিয়োজনের সহিত যোগ করা।

প্রশ্নমালা 5

যোগ কর :

1. $3a, 4a, 8a.$ 2. $3ax, -4ax, 5ax, 2ax.$

3. $-5a^2x^2, 9a^2x^2, -16a^2x^2, a^2x^2.$

4. $-6ab, -8ab, -7ab, -5ab.$

5. $\begin{array}{r} 4x \\ 5x \\ -7x \\ 8x \\ \hline \end{array}$ 6. $\begin{array}{r} 3{\cdot}7xy \\ 4{\cdot}8xy \\ -3{\cdot}2xy \\ 6{\cdot}4xy \\ \hline \end{array}$ 7. $\begin{array}{r} 3{\cdot}4ab \\ -7{\cdot}6ab \\ 6{\cdot}0ab \\ -2{\cdot}4ab \\ \hline \end{array}$

8. $\begin{array}{r} -5{\cdot}14m^2 \\ -3{\cdot}624m^2 \\ 8{\cdot}32m^2 \\ {\cdot}76m^2 \\ \hline \end{array}$ 9. $\begin{array}{r} \frac{1}{2}x^2y^2 \\ \frac{1}{3}x^2y^2 \\ \frac{1}{4}x^2y^2 \\ \frac{1}{6}x^2y^2 \\ \hline \end{array}$ 10. $\begin{array}{r} \frac{2}{3}a^2bc \\ \frac{1}{3}a^2bc \\ \frac{3}{4}a^2bc \\ \frac{1}{4}a^2bc \\ \hline \end{array}$

বিয়োগ কর :

11. $14x$ হইতে $7x$ 12. $-3ax$ হইতে $-5ax$

13. $7x^2$ হইতে $-5x^2$ 14. $8p^3$ হইতে $-17p^3$

15. $-4m^2n^2$ হইতে $-16m^2n^2$

16. $\begin{array}{r} 12x \\ -\ 7x \\ \hline \end{array}$ 17. $\begin{array}{r} 0 \\ -5ab \\ \hline \end{array}$ 18. $\begin{array}{r} -6abc \\ -2abc \\ \hline \end{array}$

19. $\begin{array}{r} -6abc \\ -12abc \\ \hline \end{array}$ 20. $\begin{array}{r} -9{\cdot}6x^2y^2 \\ 9{\cdot}2x^2y^2 \\ \hline \end{array}$ 21. $\begin{array}{r} 7{\cdot}7a^3b^3 \\ -2{\cdot}3a^3b^3 \\ \hline \end{array}$

22. $5x, -3x, -17x$ এবং $6x$-এর সমষ্টির সহিত $-5x, -9x, 6x$ এবং $7x$-এর সমষ্টি যোগ কর।

23. $3{\cdot}7ab, 7{\cdot}6ab, -9{\cdot}3ab$-এর যোগফলের সহিত $4{\cdot}52ab$ এবং $-2{\cdot}06ab$-এর যোগফল যোগ কর।

24. $-10bx$, $-16bx$ এবং $20bx$-এর যোগফল হইতে $-12bx$, $20bx$ এবং $2bx$-এর যোগফল বিয়োগ কর।

25. $\frac{1}{2}pm$, $2\frac{1}{3}pm$ এবং $-1\frac{1}{4}pm$-এর সমষ্টি হইতে $\frac{1}{6}pm$, $-\frac{1}{3}pm$ এবং $1\frac{1}{4}pm$-এর সমষ্টি বিয়োগ কর।

সরল কর :

26. $5x^2y+8x^2y-15x^2y+3x^2y$.

27. $(-1{\cdot}57p)+(-7{\cdot}24p)+(-3{\cdot}2p)+(-8{\cdot}75p)$.

28. $5ab-(-ab)+(-7ab)-(-6ab)$.

29. $(-7pq)+(-14pq)-(-21pq)+28pq$.

30. $a=2, b=-7, c=-8$ হইলে $2a-5b+7c$ এর মান কত ?

31. $x=24, y=30, z=-40$ হইলে, $5x-7y+(-9z)$ এর মান নির্ণয় কর।

32. $a=5, b=-8, c=-4, d=7, f=10$ হইলে, $-7a, -5b, 14c, -15d, 4f$ এর যোগফলের মান নির্ণয় কর।

33. $m=2, n=-3, p=5, q=-7$ হইলে,

(a) $-(-m)-n-(-q)-p$-এর মান কত ?

(b) $-(m)+p-q-(-n)$-এর মান কত ?

(c) $p-q-(-m)+(-n)$-এর মান কত ?

দ্বিপদ ও ত্রিপদ রাশির যোগ ও বিয়োগ

যোগ

নিয়ম 1. রাশিমালার অসদৃশ পদগুলিকে কেবলমাত্র '+' চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করিলেই যোগফল পাওয়া যায়।

উদাহরণ 1. $x+y$ এবং $m+n$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

নির্ণেয় যোগফল $=(x+y)+(m+n)=x+y+m+n$

[সংযোগ নিয়ম]

নিয়ম 2. পদগুলি সদৃশ হইলে রাশিগুলিকে '+' চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করিয়া, উহাদের একই শ্রেণীর সদৃশ পদগুলিকে একত্র করিয়া যোগ করিতে হয়। প্রাপ্ত যোগফলগুলি নিজ নিজ চিহ্নের সহিত পাশাপাশি লিখিলেই নির্ণেয় যোগফল পাওয়া যায়।

উদাহরণ 2. $2a+3b$, $4a+5b$ এবং $8a-7b$ যোগ কর।

নির্ণেয় যোগফল $=(2a+3b)+(4a+5b)+(8a-7b)$

$=2a+3b+4a+5b+8a-7b$ [সংযোগ নিয়ম]

$=2a+4a+8a+3b+5b-7b$ [বিনিময় নিয়ম]

$=(2a+4a+8a)+(3b+5b-7b)$ [সংযোগ নিয়ম]

$=14a+b.$

নিম্নলিখিত ভাবেও যোগ করা যাইতে পারে।

প্রথম রাশি $=2a+3b$

দ্বিতীয় রাশি $=4a+5b$

তৃতীয় রাশি $=8a-7b$

নির্ণেয় যোগফল $=14a+b.$

রাশিগুলির সদৃশ পদগুলি স্ব-স্ব চিহ্ন সহ একই স্তম্ভে রাখিয়া পরে পরে প্রত্যেকটি স্তম্ভ যোগ করা হইয়াছে।

উদাহরণ 3. $x=2$, $y=3$, $z=4$ হইলে, $5x-7y+7z$, $3x+8y-4z$ এবং $x-3z-y$-এর যোগফলের মান কত ?

প্রথম রাশি $=5x-7y+7z$

দ্বিতীয় রাশি $=3x+8y-4z$

তৃতীয় রাশি $=\ x-\ y-3z$ [পদগুলি সাজাইয়া]

নির্ণেয় যোগফল $=9x$

$=9\times 2$ [x-এর মান বসাইয়া]

$=18.$

বিয়োগ

বিয়োজ্যের চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া বিয়োজনের সহিত যোগই হইতেছে বিয়োগ।

উদাহরণ 1. $a+b$ হইতে $a-b$ বিয়োগ কর।

নির্ণেয় বিয়োগফল $=(a+b)-(a-b)$

$=a+b-a+b=2b.$

উদাহরণ 2. $5x-4y+7z$ হইতে $4x+5y-4z$ বিয়োগ কর।

নির্ণেয় বিয়োগফল $=(5x-4y+7z)-(4x+5y-4z)$

$=5x-4y+7z-4x-5y+4z$

$=5x-4x-4y-5y+7z+4z$

$=x-9y+11z.$

বিয়োজনের নীচে বিয়োজ্য স্থাপন করিয়া, বিয়োজ্যের চিহ্নগুলি পরিবর্তিত করিয়া যোগ করিলেই নির্ণেয় বিয়োগফল পাওয়া যায়।

যেমন— বিয়োজন $=5x-4y+7z$

বিয়োজ্য $=4x+5y-4z$

$\qquad\qquad -\quad -\quad +$

নির্ণেয় বিয়োগফল $=x-9y+11z.$

প্রশ্নমালা 6

যোগ কর ঃ

1. $2x+3y$ এবং $3x+4y$.
2. $x+2y$, $3x-4y$ এবং $4x+7y$.
3. a^2x+b^2y, $2a^2x-3b^2y$ এবং $-4a^2x+5b^2y$.
4. $ab+3bc+4ca$, $-4ab-3bc+8ca$, এবং $-8ab-2bc-9ca$.
5. $4m^2n^2-2p^2q^2+6x^2y^2$, $3x^2y^2-3p^2q^2+2m^2n^2$ এবং $9m^2n^2-4x^2y^2+7p^2q^2$.
6. $$\begin{array}{r} 2a+3b \\ 5a-4b \\ -4a+7b \\ \hline \end{array}$$
7. $$\begin{array}{r} 9bc+8cd-2ab \\ -2bc+3cd+8ab \\ 3bc-7cd-3ab \\ \hline \end{array}$$
8. $$\begin{array}{r} 9x^2+9y^2+9z^2 \\ -3x^2-3y^2-3z^2 \\ 2x^2+2y^2+2z^2 \\ \hline \end{array}$$
9. $$\begin{array}{r} x^3+y^3+z^3 \\ -7x^3+8y^3+2z^3 \\ 6x^3-7y^3-4z^3 \\ \hline \end{array}$$
10. $$\begin{array}{rrr} 5m^2n & +3p^2q & +7m^3z \\ 2m^2n & & -5m^3z \\ & -4p^2q & -2m^3z \\ \hline \end{array}$$

বিয়োগ কর ঃ

11. a হইতে $b-c$.
12. $a+b$ হইতে $c-b$.
13. $a+3b$ হইতে $2a-3b$.
14. $7x^2-7y+2z$ হইতে $x-2y-5z$.
15. $3x^2+4y^2+5z^2$ হইতে $2x^2-4y^2+3z^2$.

16. $\begin{array}{r} 5x+2y \\ \underline{3x+3y} \end{array}$ 17. $\begin{array}{r} -5m+3n \\ \underline{3m-5n} \end{array}$ 18. $\begin{array}{r} -9p-8q \\ \underline{-2p-2q} \end{array}$

19. $\begin{array}{r} 9x^2+7y^2-8z^2 \\ \underline{-5y^2+2z^2} \end{array}$ 20. $\begin{array}{r} -ab-bc \\ \underline{5a-2ab+3bc} \end{array}$

21. $5a+2b+3a-3b-7a-2a=$ কত ?

সরল কর :

22. $7b-3c+5a-8b+2c-9b+2a.$

23. $5a+6b-7c$, $-6a-5b-2c$ এবং $2b-3c$, এই রাশিগুলি যোগ করিয়া যোগফলের মান নির্ণয় কর, যখন

$a=2, b=3, c=4$ হয়।

24. $4x^2-5y^2-8z^3$ হইতে $3x^2-5y^2-7z^2$ বিয়োগ করিয়া বিয়োগফলের মান নির্ণয় কর, যখন

$x=3, y=4, z=5$ হয়।

25. $7ab-8bc+9ca$ হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $ab+bc+ca$ হইবে ?

গুণন (Multiplication)

সংক্ষিপ্ত যোগ প্রক্রিয়ার নামান্তর গুণন প্রক্রিয়া। কোন সংখ্যা বা রাশি একাধিক বার লইয়া যোগ করিবার সংক্ষিপ্ত প্রণালীকে গুণন বলে। যেমন, $a+a+a$, প্রক্রিয়াটি সংক্ষেপে লিখা হয় $3 \times a$. বা, $3a$. যাহাকে গুণ করা হয়, তাহাকে বলে গুণ্য (Multiplicand); যাহার দ্বারা গুণ করা হয়, তাহাকে বলে **গুণক** (Multiplier); এবং গুণলব্ধ ফলকে বলে **গুণফল** (Product)। যথা—

(1) $3 \times x = x + x + x = 3x.$

(2) $3 \times 4x = 4x + 4x + 4x = 12x.$

(3) $3 \times (-4x) = (-4x) + (-4x) + (-4x) = -12x.$

(4) $(-3) \times (-5x) = -(-5x) - (-5x) - (-5x)$

$$= 5x + 5x + 5x = 15x.$$

গুণনের সংযোগ নিয়ম

[Associative Law of Multiplication]

কতকগুলি রাশিকে পর পর গুণ করিলে যে গুণফল পাওয়া যায়, রাশিগুলিকে ইচ্ছামত 'সংঘবদ্ধ' করিয়া গুণ করিলে একই গুণফল পাওয়া যায়। গুণনের এই নিয়মকে গুণনের সংযোগ নিয়ম বলে।

যথা—

$$a \times b \times c = \text{কত ?}$$

$$a \times b \times c = abc.$$

$$a \times (b \times c) = a \times bc = abc.$$

$$(a \times b) \times c = ab \times c = abc.$$

গুণকের বিনিময় নিয়ম

[Commutative Law of Multiplication]

কতকগুলি রাশিকে গুণ করিতে হইলে, রাশিগুলিকে ইচ্ছামত 'সাজাইয়া' গুণ করা চলে। ইহাকে গুণকের বিনিময় নিয়ম বলে।

$$\text{গুণ্য} \times \text{গুণক} = \text{গুণক} \times \text{গুণ্য}$$

যেমন, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}.$

আবার, $abc = acb = bac = bca = cab = cba.$

যে-কোন সংখ্যক গুণনীয়কের ক্ষেত্রে এই বিনিময় নিয়ম প্রযোজ্য।

ঘাত (Power) এবং সূচক (Index) :

কোন রাশিকে সেই রাশি দ্বারা বারবার গুণ করিলে যে গুণফল পাওয়া যায়, সেই গুণফলকে ঐ রাশির ঘাত বা শক্তি (Power) বলে।

যতবার গুণ করা হয়, তাহাকে সূচক (Index) বলে।

a হইতেছে a-এর প্রথম ঘাত (First Power)। যে-কোন রাশি হইতেছে সেই রাশির প্রথম ঘাত। কারণ, $a^1 = a$; $b^1 = b$.

$a \times a$, a-এর দ্বিতীয় ঘাত (Second Power) বা বর্গ, ইহাকে লেখা হয় a^2। এখানে 2 সূচক।

$a \times a \times a$, a-এর তৃতীয় ঘাত (Third Power) বা ঘন ইহাকে লেখা হয় a^3। এখানে 3 সূচক।

$a \times a \times a \times a$, a-এর চতুর্থ ঘাত (Fourth Power), ইহাকে লেখা হয় a^4 (to the power four)। এখানে 4 সূচক।

$a \times a \times a \times a \times a \cdots n$ বার $=$ a-এর n তম ঘাত $= a^n$.

গুণনের সূচক নিয়ম [Index law of Multiplication]

m এবং n দুইটি অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে,

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \text{ হয়।}$$

সংজ্ঞানুসারে, $a^2 = a \times a = a^1 \times a^1 = a^{1+1}$

$$a^3 = a \times a \times a = a^2 \times a^1 = a^{2+1}$$

$$a^4 = a \times a \times a \times a = (a \times a) \times (a \times a)$$
$$= a^2 \times a^2 = a^{2+2}$$

$$a^5 = a \times a \times a \times a \times a = (a \times a \times a) \times (a \times a)$$
$$= a^3 \times {}^2 = a^{3+2}$$

সেইরূপ, $a^m = a \times a \times a \cdots m$ সংখ্যক উৎপাদক।

এবং $a^n = a \times a \times a \cdots\cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক।

$\therefore \quad a^m \times a^n = a^{m+n}$; ইহাই গুণনের সূচক নিয়ম।

গুণনের সূচক নিয়ম প্রয়োগ করিয়া বলা যাইতে পারে,

$a^3 \times a^5 \times a^6 \times a^{10} = a^{3+5+6+10} = a^{24}$.

সুতরাং, ভিন্ন ভিন্ন ঘাত বিশিষ্ট একই রাশি পর পর গুণ করিলে গুণফলে উক্ত রাশির ভিন্ন ভিন্ন সূচকগুলি যোগ করিতে হয়।

আবার, m এবং n প্রত্যেকে অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে,

$(a^m)^n = a^{mn}$ হইবে। $(a^2)^3 = a^6$ হইবে।

গুণনের চিহ্ন-বিষয়ক নিয়ম ঃ

[Laws of signs in Multiplication]

গুণনের সংজ্ঞা হইতে নিম্নলিখিত নিয়মগুলি পাওয়া যায় ঃ

a এবং b অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে,

(1) $(+a) \times (+b) = +(a \times b) = +ab.$

(2) $(-a) \times (+b) = -(a \times b) = -ab.$

(3) $(+a) \times (-b) = -(a \times b) = -ab.$

(4) $(-a) \times (-b) = +(a \times b) = +ab.$

অতএব, দুইটি রাশি গুণ করিলে গুণ্য ও গুণক যদি ('+' কিংবা '−') সদৃশ চিহ্ন-যুক্ত হয়, তাহা হইলে উহাদের গুণফলের পূর্বে '+' চিহ্ন বসিবে। কিন্তু গুণ্য ও গুণক যদি অসদৃশ চিহ্ন-যুক্ত হয়, তাহা হইলে তাহাদের গুণফলের পূর্বে '−' চিহ্ন বসিবে।

উদাহরণ 1. a^{10} কে a^{12} দ্বারা গুণ কর।

$a^{10} \times a^{12} = a^{10+12}$ [সূচক নিয়ম দ্বারা]

$= a^{22}$.

উদাহরণ 2. $3a^5b^6$ কে $-7a^2b^3$ দ্বারা গুণ কর।

নির্ণেয় গুণফল $=(3a^5b^6)\times(-7a^2b^3)$

$=-\{(3a^5b^6)\times(7a^2b^3)\}$ [চিহ্ন-বিষয়ক নিয়ম দ্বারা]

$=-\{3\times a^5\times b^6\times 7\times a^2\times b^3\}$ [সংযোগ নিয়ম দ্বারা]

$=-\{3\times 7\times a^5\times a^2\times b^6\times b^3\}$ [বিনিময় নিয়ম দ্বারা]

$=-\{(3\times 7)\times(a^5a^2)\times(b^6b^3)\}$ [সংযোগ নিয়ম দ্বারা]

$=-(21\times a^{5+2}\times b^{6+3})$ [সূচক নিয়ম দ্বারা]

$=-21a^7b^9.$

সহজ প্রণালী : গুণ্য $= 3a^5b^6$

গুণক $= -7a^2b^3$

নির্ণেয় গুণফল $= -21a^7b^9$

এখানে গুণ্য ও গুণক অসদৃশ চিহ্নযুক্ত হওয়ার জন্য গুণফলে '−' চিহ্ন বসিয়াছে। তারপর গুণ্য ও গুণকের সংখ্যাত্মক সহগ গুণ করা হইয়াছে। সর্বশেষে গুণ্য ও গুণকের আক্ষরিক পদের সূচক যোগ করিয়া নির্ণেয় গুণফল পাওয়া গিয়াছে।

উদাহরণ 3. $-4x^2yz$, $-5xy^2z^3$ এবং $6x^3y^3z^4$-এর ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর।

নির্ণেয় গুণফল $=(-4x^2yz)\times(-5xy^2z^3)\times(6x^3y^3z^4)$

$=+(4\times x^2\times y\times z\times 5\times x\times y^2\times z^3\times 6\times x^3\times y^3\times z^4)$ [সংযোগ নিয়ম]

$=(4\times 5\times 6)\times(x^2\times x\times x^3)\times(y\times y^2\times y^3)\times(z\times z^3\times z^4)$ [বিনিময় নিয়ম]

$=120\times(x^{2+1+3})\times(y^{1+2+3})\times(z^{1+3+4})$ [সূচক নিয়ম]

$=120x^6y^6z^8.$

প্রশ্নমালা 7

গুণ কর :

1. a কে a দ্বারা।
2. $2a$ কে a দ্বারা।
3. $4a$ কে $3a$ দ্বারা।
4. $3x$ কে $-4y$ দ্বারা।
5. $-3x$ কে $-4y$ দ্বারা।
6. $-8ab$ কে $3ax$ দ্বারা।
7. $2x^2y$ কে $5x^3y^2$ দ্বারা।
8. $-2xy^3$ কে $-9x^4y^2$ দ্বারা।
9. $-12x^3y^2z^4$ কে $8x^4y^5$ দ্বারা।
10. $-16m^3n^4$ কে $-12m^6n^8p^9$ দ্বারা।
11. $-a^5x^6y^4$ কে $-5ax^4z^3$ দ্বারা।
12. $5mp^2q^4$ কে $-16n^4p^3q$ দ্বারা।

গুণফল নির্ণয় কর :

13. $\begin{array}{r} -10xyz^4 \\ axz^8 \\ \hline \end{array}$

14. $\begin{array}{r} -5axp^3 \\ -3a^3bx^3 \\ \hline \end{array}$

15. $\begin{array}{r} 14a^2b^2c^2 \\ -a^3b^3c^3 \\ \hline \end{array}$

16. $\begin{array}{r} 9pxq^3 \\ -8p^4y^4x^6 \\ \hline \end{array}$

17. $\begin{array}{r} -8a^2b^3c \\ -7a^6b^8x \\ \hline \end{array}$

18. $\begin{array}{r} 14abxy \\ -5abxv \\ \hline \end{array}$

19. $\begin{array}{r} 6a^{10}b^{11}c^{12} \\ -10a^8b^6c^9 \\ \hline \end{array}$

20. $\begin{array}{r} -6a^2b^3c^4d^8 \\ -12a^8b^6c^7d^6 \\ \hline \end{array}$

21. $\begin{array}{r} -22x^7y^3z^7 \\ 40x^3y^7z^3 \\ \hline \end{array}$

সরল কর :

22. $(2ab)\times(5bc)\times(-6a^2bc)$.
23. $(-8a^3b)\times(4ad^3)\times(-6a^2b^2d)$.
24. $(-3a^3b^3c^4)\times(-8a^2b^3c^{10})\times(-5a^6b^7)$.

25. $(-x^4)^3 \times (2x^2)^3 \times (5x^3)$.

26. $(2x^2y^2)^2 \times (3xy^3)^3 \times (6x^3y^3)$.

27. $(5x^2)^3 \times (2x^2y)^4 \times (3x^4)^3$.

গুণনের বিচ্ছেদ নিয়ম

[Distributive Law of Multiplication]

$(a+b)\ x = ax + bx$-কে গুণনের বিচ্ছেদ নিয়ম বলে।

মনে কর, x একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা। গুণনের সূত্রানুসারে

$(a+b)x = (a+b)+(a+b)+(a+b)+\cdots\cdots x$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

$= (a+a+a\cdots\cdots x$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত $)$

$+ (b+b+b\cdots\cdots x$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত $)$

$= (a \times x) + (b \times x) = ax + bx.$

অনুসিদ্ধান্ত 1. $(a-b)x = ax - bx.$

কারণ, $(a-b)x = \{(a)+(-b)\}x = \{(a)\times x\} + \{(-b)\times x\}$

$= ax - bx.$

অনুসিদ্ধান্ত 2. $(a+b+c)x = ax + bx + cx.$

মিশ্র দ্বিপদ (Binomial) এবং ত্রিপদ (Trinomial) রাশিকে একপদ রাশি দ্বারা গুণন :

মিশ্র রাশিমালাকে একপদ রাশি দ্বারা গুণ করিতে হইলে মিশ্র রাশিমালার প্রত্যেক পদকে গুণ্যরূপে ধরিতে হয়। ইহার পর একপদ গুণক রাশির দ্বারা মিশ্র রাশিমালার প্রত্যেক পদকে পৃথক ভাবে গুণ করিতে হয়। উক্ত গুণফলগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি হইবে নির্ণেয় গুণফল।

উদাহরণ 1. $3x+4y$ কে $5xy$ দ্বারা গুণ কর।

নির্ণেয় গুণফল $=(3x+4y)\times 5xy$

$$=(5xy)\times(3x)+(5xy)\times(4y)$$

$$=15x^2y+20xy^2.$$

বিকল্প প্রণালী :

গুণ্য $\rightarrow 3x+4y$

গুণক $\rightarrow 5xy$

নির্ণেয় গুণফল $\rightarrow 15x^2y+20xy^2.$

উদাহরণ 2. $3x^2y-4xy^2-5x^2y^2$-কে $+6xy$ দ্বারা গুণ কর।

গুণ্য $\rightarrow 3x^2y-4xy^2-5x^2y^2$

গুণক $\rightarrow -6xy$

নির্ণেয় গুণফল $\equiv \rightarrow -18x^3y^2+24x^2y^3+30x^3y^3.$

উদাহরণ 3. সরল :

$$a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2).$$

প্রদত্ত রাশি $\equiv a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)$

$$=a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2-a^2b^2+a^2c^2-b^2c^2$$

$$=a^2b^2-a^2b^2-a^2c^2+a^2c^2+b^2c^2-b^2c^2$$

$$=0.$$

উদাহরণ 4. সরল কর :

$$5x(2x+3)+8x^2(2+3x)-5(7-2x^2)$$

প্রদত্ত রাশি $\equiv 5x(2x+3)+8x^2(2+3x)-5(7-2x^2)$

$$=10x^2+15x+16x^2+24x^3-35+10x^2$$

$$=24x^3+10x^2+16x^2+10x^2+15x-35$$

$$=24x^3+36x^2+15x-35.$$

প্রশ্নমালা 8

গুণ কর :

1. $2x+9$-কে 5 দ্বারা। 2. $3x-8$-কে $6x$ দ্বারা।

3. $7a-6b$-কে $-8ab$ দ্বারা।

4. $-6a-9b$-কে $-2x$ দ্বারা।

5. $2a^2-3b^2$-কে $-5ab$ দ্বারা।

6. $-2x^2y-8xy^2$-কে $6a^2x^2$ দ্বারা।

7. $a+2b+3c$-কে $2ab^2$ দ্বারা।

8. $x^2-y^2+3z^2$-কে $-5x^2y^2$ দ্বারা।

9. $2a^2b+3bc-4a^4b^6$-কে $-11a^2b^2c^8$ দ্বারা।

10. $6xy^3-7x^8y^7-5x^7z^8$-কে $-6x^5y^5z^3$ দ্বারা।

গুণফল নির্ণয় কর :

11. $(5x-6xy^2)\times(6xy)$.

12. $(6x^2y-8xy^7)\times 8x^2y^3$.

13. $(8a^2b^3-5b^3c^3)\times(-8ab^3c)$.

14. $(9ab^2c^2-5c^2d^2)\times 6a^5b^3$.

15. $(4ab+5bc)6x$.

16. $(-5x^2y^3)(9mx-4nx^3y)$.

17. $(2x+3x^2+4x^3)\times(-8x^5)$.

18. $5x^8y^3(7x^3y-x^{10}y^{12}+3xy)$.

19. $(3x^3y^3-4x^5y^5-5x^6y^6)(9x^3y^3)$.

20. $(2a^{10}b^{12}-3a^5b^6+4a^8b^8)(-7a^3b^4)$.

সরল কর :

21. $a^3(b^3-c^3)+b^3(c^3-a^3)+c^3(a^3-b^3)$.

22. $4x^2(x-3)+5x^2(x-4)-6x^2(3-4x)$.

23. $2x^3(5-6x)-3x^3(4-7x)+8x^3(4x-5)$.

24. $a^2b^2(b^2-2c^2)-b^2c^2(c^2-2a^2)$
$-c^2a^2(a^2-2b^2)$.

25. $2x^2y(2x+3y-4z)+3xy^2(3x+4y-5z)$
$-4yz^2(4x+3y-2z)$.

ভাগ (Division)

যে রাশিকে ভাগ করা হয়, তাহা ভাজ্য (Dividend), যে রাশি দ্বারা ভাগ করা হয়, তাহা ভাজক (Divisor) এবং ভাগ করিয়া যে রাশিটি ফল হিসাবে পাওয়া যায় তাহা ভাগফল (Quotient)। ভাজ্য, ভাজক এবং ভাগফলের মধ্যে সম্বন্ধ নিম্নরূপ—

ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল ।

ভাগফল লিখিবার প্রণালী : ভাজক b এবং ভাজ্য a হইলে, ভাগক্রিয়ার ভাগফল লেখা হইবে, $a \div b$ বা $\frac{a}{b}$ বা a/b আকারে।

ভাগফলের চিহ্ন বিষয়ক নিয়ম : দুইটি রাশির গুণফলকে উহাদের যে কোন একটি রাশি দ্বারা ভাগ করিলে অপর রাশিটি ভাগফল হিসাবে পাওয়া যায়। যথা—

(i) $(+a)\times(+b)=+ab \quad \therefore \quad \left.\begin{array}{l} +ab\div(+a)=+b \\ +ab\div(+b)=+a \end{array}\right\}$

(ii) $(-a)\times(+b)=-ab \quad \therefore \quad \left.\begin{array}{l} -ab\div(-a)=+b \\ -ab\div(+b)=-a \end{array}\right\}$

(iii) $(+a)\times(-b)=-ab \quad \therefore \quad \left.\begin{array}{l} -ab\div(+a)=-b \\ -ab\div(-b)=+a \end{array}\right\}$

(iv) $(-a)\times(-b)=+ab \quad \therefore \quad \left.\begin{array}{l} +ab\div(-a)=-b \\ +ab\div(-b)=-a \end{array}\right\}$

অতএব, ভাজ্য ও ভাজক উভয়েই সদৃশ চিহ্নযুক্ত হইলে ভাগফলে যোগ '+' চিহ্ন এবং অসদৃশ চিহ্নযুক্ত হইলে বিয়োগ '−' চিহ্ন বসিবে।

ভাগের সূচক নিয়ম [Index Law of Division] :

m এবং n দুইটি অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে এবং n অপেক্ষা m বৃহত্তর হইলে, $a^m \div a^n = a^{m-n}$ হয়, ইহাকে ভাগের সূচক নিয়ম বলে।

প্রমাণ : $a^{m-n} \times a^n = a^{m-n+n}$

$= a^m$ (গুণনের সূচক নিয়ম),

$\therefore \quad a^m \div a^n = a^{m-n}$ (ভাগের সূচক নিয়ম)।

এই নিয়মের সাহায্যে লইয়া বলা যায়—

$$a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0$$

আবার $a^m \div a^m = \dfrac{a^m}{a^m} = 1. \quad \therefore \; a^0 = 1.$

অতএব যে-কোন সংখ্যার ঘাতের সূচক 0 হইলে উহার মান 1 হইবে। যেমন, $x^0 = 1$; $y^0 = 1$; $p^0 = 1$ ইত্যাদি।

একপদ রাশিকে অপর একটি রাশিপদ দ্বারা ভাগ :

উদাহরণ 1. $8a^3b^5$-কে $4a^2b^2$ দ্বারা ভাগ কর।

$8a^3b^5 \div 4a^2b^2 = +\dfrac{8a^3b^5}{4a^2b^2}$ (ভাগের চিহ্ন বিষয়ক নিয়ম অনুসারে '+' চিহ্ন লেখা হইয়াছে, কিন্তু প্রথমে '+' চিহ্ন লেখা হয় না।)

$= \dfrac{8 \times a^3 \times b^5}{4 \times a^2 \times b^2} = \dfrac{8}{4} \cdot \dfrac{a^3}{a^2} \cdot \dfrac{b^5}{b^2}$

$= 2.(a^{3-2}).(b^{5-2})$ [ভাগের সূচক নিয়ম অনুসারে].

$= 2.a.b^3 \quad = 2ab^3.$

অথবা, $8a^3b^5 \div 4a^2b^2 = \dfrac{8a^3b^5}{4a^2b^2}$

$$= \frac{4 \times 2 \times a^2 \times a \times b^2 \times b^3}{4 \times a^2 \times b^2} = 2ab^3$$

নিয়ম : (1) চিহ্ন বিষয়ক নিয়ম অনুসারে প্রথমে ভাগফলের চিহ্ন বিচার কর।

(2) ভাজ্যের সংখ্যাত্মক সংখ্যাকে ভাজকের সংখ্যাত্মক সংখ্যা দ্বারা ভাগ কর।

(3) ভাজ্যের অন্তর্গত কোন অক্ষরের সূচক হইতে ভাজকের উক্ত অক্ষরের সূচক বিয়োগ কর এবং এইসব সংখ্যাগুলি গুণ কর।

উদাহরণ 2. $-16^{10}b^5c^8d^2$-কে $-2a^2b^3c^5$ দ্বারা ভাগ কর।

নির্ণেয় ভাগফল $= \dfrac{-16a^{10}b^5c^8d^2}{-2a^2b^3c^5}$

$= \dfrac{16}{2}.\ \dfrac{a^{10}}{a^2}.\ \dfrac{b^5}{b^3}.\ \dfrac{c^8}{c^5}.d^2$ (চিহ্ন বিষয়ক নিয়ম)

$= +8a^{10-2}.\ b^{5-3}.\ c^{8-5}.\ d^2$ (সূচক নিয়ম)

$= 8a^8b^2c^3d^2.$

প্রশ্নমালা 9

ভাগ কর :—

1. $2a^2$-কে a দ্বারা। 2. $-2a^3b^3$-কে a^2b^2 দ্বারা।
3. $10a^5b^6$-কে $-2a^3b^2$ দ্বারা।
4. $-18x^5b^8c^7$-কে $-6x^5c^5$ দ্বারা।
5. $24p^4q^8$-কে $6p^3q$ দ্বারা।
6. $-35x^3y^5z^{10}$-কে $7x^3z^6$ দ্বারা।
7. $-40a^{15}b^{16}$-কে $-8a^{10}b^4$ দ্বারা।
8. $-4m^3n^3p^6$-কে $2m^3n^2p^2$ দ্বারা।

9. $48a^{10}b^4c^6$-কে $-12c^5b^2a^2$ দ্বারা।

10 $9a^{110}b^{96}c^{82}$-কে $-3a^{64}b^{67}c^{57}$ দ্বারা।

ভাগফল নির্ণয় কর :

11. $(9x^8y^9z^{10})\div(3x^3y^5z^8)$.

12. $(-21m^3p^8z^4)\div(-7m^3p^5)$.

13. $(120x^{18}y^7z^6)\div(-6x^8y^5z^3)$.

14. $(-121a^{105}b^{96})\div(11a^{26}b^{37})$.

15. $(-256x^{200}y^{125}z^{100})\div(-16x^{108}y^{104}z^{98})$.

16. দেখাও যে, $5^0=1$ হইবে।

ভাগের বিচ্ছেদ নিয়ম [Distributive Law of Division] :

$$\frac{a+b}{x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}$$ হয়। অর্থাৎ,

একটি মিশ্র রাশিমালার প্রত্যেকটি পদকে একপদ ভাজক রাশি দ্বারা পৃথক পৃথক ভাবে ভাগ করিয়া প্রাপ্ত ভাগফলগুলিকে একত্রে যোগ করিলে ভাগফল পাওয়া যায়। ইহাকে ভাগের বিচ্ছেদ নিয়ম বলে। এই নিয়মে দ্বি-পদ ও ত্রিপদ প্রভৃতি রাশিকে একপদ রাশি-দ্বারা ভাগ করা হয়।

উদাহরণ 1. $2a^4b^2-3a^3b$-কে a^2b দ্বারা ভাগ কর।

নির্ণেয় ভাগফল $=\dfrac{2a^4b^2-3a^3b}{a^2b}=\dfrac{2a^4b^2}{a^2b}+\dfrac{-3a^3b}{a^2b}$

$$=2a^2b-3a.$$

উদাহরণ 2. $6x^5y^4-9x^8y^9+12x^{12}y^5$-কে $-3x^3y^4$ দ্বারা ভাগ কর।

$$\text{নির্ণেয় ভাগফল} = \frac{6x^5y^4-9x^8y^9+12x^{12}y^5}{-3x^3y^4}$$

$$= \frac{6x^5y^4}{-3x^3y^4}+\frac{-9x^8y^9}{-3x^3y^4}+\frac{12x^{12}y^5}{-3x^3y^4}$$

$$= -2x^2+3x^5y^5-4x^9y.$$

প্রশ্নমালা 10

ভাগ কর :—

1. x^3+2x^2-কে x^2 দ্বারা।
2. $2x^4y^2-3x^4y^5$-কে x^2y^2 দ্বারা।
3. $-3x^4y^5-4x^7y^7$-কে $-x^3y^5$ দ্বারা।
4. $-a^{10}b^{10}+a^{12}b^7$-কে $-a^6b^6$ দ্বারা।
5. $10x^6y^7-15x^7y^{10}$-কে $-5x^3y^4$ দ্বারা।
6. $2a^3b^3-4a^4b^4-6a^7b^3$-কে $2a^2b$ দ্বারা।
7. $3x^6y^7+9x^8y^5-12x^{10}y^7$-কে $-3x^4y^3$ দ্বারা।
8. $-8a^{10}y^7-12a^{11}b^{10}-16a^{12}z^7$-কে $-4a^8$ দ্বারা।
9. $6a^3b^3c^4-9a^4b^4c^3+12a^{10}b^6c^7$-কে $-3a^3b^2c$ দ্বারা।
10. $25x^5y^7z^{10}+75x^8y^7z^{12}-125x^{12}y^{12}z^5$-কে $-25x^5y^6z^4$ দ্বারা।

বন্ধনীর ব্যবহার (Use of brackets) :

(1) বন্ধনী অপসারণ (Removal of brackets) এবং

(2) বন্ধনী সংস্থাপন (Insertion of brackets).

বন্ধনী (Brackets) : '—', '( )', '{ }', '[ ]'. এই চারিটি চিহ্নের নাম বন্ধনী। ইহাদিগকে যথাক্রমে রেখাবন্ধনী, (Vinculum), লঘুবন্ধনী বা প্রথম বন্ধনী (First bracket), ধনুর্বন্ধনী বা দ্বিতীয় বন্ধনী (Second bracket) এবং গুরু বন্ধনী বা তৃতীয় বন্ধনী (Third bracket) বলে। সাধারণতঃ গুরুবন্ধনীর মধ্যে ধনুর্বন্ধনী, লঘুবন্ধনী এবং রেখাবন্ধনী ; ধনুর্বন্ধনীর মধ্যে লঘুবন্ধনী ও রেখাবন্ধনী এবং লঘুবন্ধনীর মধ্যে কেবল রেখাবন্ধনী থাকে।

বন্ধনীর ব্যবহার : (সংস্থাপন ও অপসারণ) :

নিয়ম 1. কোন রাশিমালার অন্তর্গত দুই বা ততোধিক পদকে একটি মাত্র পদের ন্যায় গণ্য করার জন্য তাহাদিগকে বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন করিতে হয়।

যথা, $a+b+c=a+(b+c)$ বা, $(a+b)+c$.

আবার, $a+b+c+d=a+b+(c+d)$.

$$=a+\{b+(c+d)\}.$$

নিয়ম 2. একটি রাশিমালার যে কোন সংখ্যক পদকে বন্ধনীর বামপার্শ্বস্থ '+' চিহ্নযুক্ত বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন করিলে উক্ত পদগুলির কোন চিহ্নের পরিবর্তন হয় না।

যথা, $a+b-c+d-f=a+b-c+(d-f)$

$$=a+\{(b-c)+(d-f)\}.$$

নিয়ম 3. একটি রাশিমালার যে কোন সংখ্যক পদকে, বন্ধনীর বামপার্শ্বে সংলগ্ন '−' চিহ্নযুক্ত বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন করিলে, ঐ পদগুলির চিহ্ন পরিবর্তন ('+' কে '−' এবং '−' কে '+') করিতে হয়।

যথা, $a+b-c-d-e-f=a-[-b+c+d+e+f]$

$$=a-[-b-\{-c-d-e-f\}]$$

$$=a-[-b-\{-c-(d+e+f)\}]$$

$$=a-[-b-\{-c-(d-\overline{-e-f})\}].$$

নিয়ম 4. কোন বন্ধনীর পূর্বে '+' চিহ্ন থাকিলে বন্ধনীর অন্তর্গত রাশিমালার চিহ্নের পরিবর্তন না করিয়া বন্ধনী অপসারণ করা হয়।

যথা, $a+(b+c)=a+b+c$

আবার, $a+\{b+(c-d)\}=a+\{b+c-d\}=a+b+c-d$

নিয়ম 5. কোন বন্ধনীর পূর্বে '−' চিহ্ন থাকিলে বন্ধনীর অন্তর্গত রাশিমালার চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া বন্ধনী অপসারণ করিতে হয়।

যথা, $a+b-(c-d-e)=a+b-c+d+e.$

আবার, $a-[b-c-\{d-(e-f)\}]$

$$=a-[b-c-\{d-e+f\}]$$

$$=a-[b-c-d+e-f]$$

$$=a-b+c+d-e+f.$$

নিয়ম 6. কোন পদ ও বন্ধনীর মধ্যে কোন কোন চিহ্ন না থাকিলে বন্ধনী অপসারণের সময় ঐ পদ দিয়া বন্ধনীস্থ প্রতি রাশিকে গুণ করিতে হয়। যথা, $a(b-c)=ab-ac.$

নিয়ম 7. দুইটি বন্ধনীর মধ্যে কোন চিহ্ন না থাকিলে বন্ধনীর দুইটির মধ্যে 'এর' উহ্য আছে বলিয়া মনে করিতে হয়।

যথা, $(a+b)(b+c)=(a+b)$ এর $(b+c)$

$$=a(b+c)+b(b+c)=ab+ac+b^2+bc.$$

বন্ধনীর অপসারণের ক্রম :—সাধারণতঃ দুই প্রকারের ক্রম অনুসরণ করিয়া কোন রাশিমালার অন্তর্গত বন্ধনী মুক্ত করা হয়।

প্রথমতঃ সকলের ভিতরের বন্ধনী হইতে আরম্ভ করিয়া এক একটি বন্ধনী অপসারণ করিতে হয়। অর্থাৎ, রৈখিক বন্ধনী হইতে আরম্ভ করিয়া ক্রমশঃ প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় বন্ধনী অপসারণ করা হয়।

দ্বিতীয়তঃ, ইহার বিপরীত ক্রম অনুসরণ করিয়াও কোন রাশি-মালা বন্ধনীমুক্ত করা যাইতে পারে। অর্থাৎ তৃতীয় বন্ধনী হইতে আরম্ভ করিয়া ক্রমশঃ দ্বিতীয়, প্রথম ও সর্বশেষে রৈখিক বন্ধনী অপসারণ করিতে হয়।

উদাহরণ 1. **সরল কর :** $x-[y-\{-x-(-y-\overline{-x+y+z})\}]$

প্রদত্ত রাশি $\equiv x-[y-\{-x-(-y-\overline{-x+y+z})\}]$

$$=x-[y-\{-x-(-y+x-y-z)\}]$$

$$=x-[y-\{-x+y-x+v+z\}]$$

$$=x-[y+x-y+x-y-z]$$

$$=x-y-x+y-x+y+z$$

$$=x-x-x-y+y+y+z$$

$$=-x+y+z.$$

উদাহরণ 2. $a-[-b-\{-c-(-a-\overline{-b-c})\}]$ কে প্রথমে বহির্বন্ধনী এবং সর্বশেষে অন্তর্বন্ধনী অপসারণ করিয়া সরল কর।

প্রদত্ত রাশি $\equiv a-[-b-\{-c-(-a-\overline{-b-c})\}]$

$$=a+b+\{-c-(-a-\overline{-b-c})\}$$

$$=a+b-c-(-a-\overline{-b-c})$$

$$=a+b-c+a+\overline{-b-c}$$

$$=a+b-c+a-b-c$$

$$=a+a+b-b-c-c=2a-2c.$$

উদাহরণ 3. $a-b+c+d-e+f$ রাশিমালার প্রথম তিনটি পদকে এবং শেষের তিনটি পদকে এমন বন্ধনীর মধ্যে আবদ্ধ কর যেন বন্ধনীর পূর্বে '$-$' চিহ্ন থাকে। পরে ঐ বন্ধনীর দ্বারা আবদ্ধ দ্বিতীয়

ও তৃতীয় পদকে একটি অন্তর্বন্ধনীর দ্বারা এবং পঞ্চম ও ষষ্ঠপদকে আর একটি অন্তর্বন্ধনী দ্বারা এরূপভাবে আবদ্ধ কর যে উহার পূর্বে ‘ – ’ চিহ্ন থাকে।

$$\begin{aligned} a-b+c+d-e+f &= -\{-a+b-c\}-\{-d+e-f\} \\ &= -\{-a-(-b+c)\}-\{-d-(-e+f)\}. \end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 11

সরল কর :—

1. $a+(b-c)-(a-b+c)$.
2. $(a+b-c)+(a-c)-(b-c)$.
3. $bc-\{ab+c(a-b)\}$.
4. $ab-\{b(c+a)-(b+c)\}$.
5. $a-[b-\{c-(a-\overline{b+c})\}]$.
6. $-a-[-2b-\{3c-(4a-\overline{-a+2b+c})\}]$.
7. $-2x-[3y-\{4z-(5x-\overline{-x-y-z})\}]$.
8. $3x-[4y-\{2x-(-5y-\overline{-3x-4y})\}]$.
9. $-a-\{-b-(-c-\overline{-a-b-c})\}$.
10. $-2x-\{-3y-(-4z-\overline{-2x-3y+3z})\}$.

প্রথমে বহির্বন্ধনী ও সর্বশেষে অন্তর্বন্ধনী অপসারণ করিয়া নিম্নলিখিত রাশিগুলি সরল কর :—

11. $x-\{y-(x-y)\}$.
12. $2x+[3y-\{4z-(x+y)\}]$.
13. $-2m-[4n-\{5n-(6m+3n)\}]$

14. $5a-[2b-\{8c-(2a-\overline{3b+4c})\}]$.

15. $6a-[8b-\{2a-(3c-\overline{a+2b-3c})\}]$.

16. $-x-\{-y-(-z-\overline{-x-y})\}$.

17. $3y-[x-\{-2y-(3z-\overline{-2x-2y+3z})\}]$.

18. $\{2x-(3y-4z)\}-\{4x+(2y-3z)\}$.

19. $\{2x-3y-\overline{x-y}\}+\{2x-(y-\overline{3x-2y})\}$.

20. $[2a-\{2b-(3c-\overline{-a+2b})\}]$
$$-[-3a-\{3b-(-3c-\overline{-2a+2b-2c})\}].$$

21. $a+b+c-d-e-f$ রাশিমালার প্রথম পদ বাদ দিয়া '$-$' চিহ্ন যুক্ত একটি বন্ধনীর মধ্যে দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদকে এবং '$+$' চিহ্নযুক্ত একটি বন্ধনীর মধ্যে চতুর্থ, পঞ্চম ও ষষ্ঠ পদকে স্থাপন কর।

22. $x+y-z-p-q-r$ রাশিমালাটির প্রথম ও দ্বিতীয় পদ বাদ দিয়া অবশিষ্ট পদগুলিকে '$-$' চিহ্ন থাকে এরূপ একটি বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন কর। তৎপরে ঐ বন্ধনীর মধ্যস্থিত শেষের তিনটি পদকে '$-$' চিহ্ন থাকে এরূপ একটি বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন কর।

পঞ্চম অধ্যায়

বহুপদ রাশির যোগ এবং বিয়োগ

বহুপদ রাশিকে দ্বিপদ রাশিদ্বারা গুণ, বহুপদ রাশিকে একপদ রাশিদ্বারা ভাগ।

Polynomials—Addition and Subtraction.

Multiplication of ploynomials with two terms, Division of polynomials (divisor being one term).

বহুপদ রাশির যোগ :

বহুপদ রাশির যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে উহাদিগকে একটির নীচে একটি করিয়া এরূপে সাজাইতে হয় যেন একই শ্রেণীর সদৃশ পদগুলি একই স্তম্ভে থাকে। সর্বনিম্ন রাশিমালার নীচে একটি অনুভূমিক রেখা টানিয়া প্রত্যেক স্তম্ভের বীজগণিতীয় যোগফল নিজ নিজ চিহ্নের সহিত রেখাটির নীচে লিখিয়া গেলেই যোগফল পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ 1. $5x^3-4x^2+2x-1$, $-3x^3+2x^2+6x+4$ এবং $8x^3-6x^2+7x-8$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $\rightarrow \quad 5x^3-4x^2+2x-1$

দ্বিতীয় ,, $\rightarrow -3x^3+2x^2+6x+4$

তৃতীয় ,, $\rightarrow \quad 8x^3-6x^2+7x-8$

নির্ণেয় যোগফল $\rightarrow 10^3-8x^2+15x-5$.

উদাহরণ 2. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{4}c+\frac{1}{5}d$, $\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}b-\frac{1}{2}c+\frac{1}{5}d$ এবং $-\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{3}c-\frac{2}{5}d$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি→ $\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{4}c+\frac{1}{5}d$

দ্বিতীয় „ → $\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}b-\frac{1}{2}c+\frac{1}{5}d$

তৃতীয় „ → $-\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{3}c-\frac{2}{5}d$

নির্ণেয় যোগফল →$(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4})a+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2})b$

$+(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3})c+(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{2}{5})d.$

$=\frac{7}{12}a+\frac{7}{12}b-\frac{7}{12}c.$

$=\frac{7}{12}(a+b-c).$

প্রশ্নমালা 12

যোগ কর:

1. x^3+4x^2-5x+8 এবং $9x^3-5x^2+7x-5.$
2. $7a-8b-9c+4d$, $4a+5b-6c+d$ এবং $a-2b+c+d.$
3. $12p+11q+5r-3s$, $7q-5r+4s-3p$ এবং $5s-3r-2q+8p.$
4. $8x^2+9y^2-2a^2+3b^2$, $5x^2-2a^2+3b^2-4y^2$ এবং $9y^2-3x^2+2b^2-3a^2$
5. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{7}b+\frac{1}{8}c-\frac{1}{9}d$, $\frac{1}{2}a-\frac{2}{7}b-\frac{1}{8}c-\frac{1}{9}d$, $a+\frac{1}{7}b+\frac{3}{8}c-\frac{2}{9}d.$
6. $5x^3+4x^2y+4xy^2-3$, $3x^3-2x^2y+2xy^2+4$, $-4x^3-6x^2y-3xy^2+7.$

7. $12ab+7bc+5ca+10cd,\ -7ab-10bc+6ca-4cd$ এবং $-9cd-2bc+3ab-7ca.$

8. $x^5-7x^4-3x^3+7x^2-3x,\ 2x^5+4x^3-3x^2+4x+3$ এবং $4x^5-9x^4+8x^3+5x-8.$

9. $16x^4-10x^3y+3x^2y^2-2xy^3-4y^4,$
$2x^4-5x^3y-7x^2y^2-9xy^3-5y^4,$
$2x^3y-3x^4+4xy^3-2x^2y^2+10y^4$
এবং $5xy^3-3x^3y+2x^4-2y^4.$

$x=2,\ y=3,\ a=4,\ b=5$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

10. $(3x^3+7x^2-5x+4)+(8x^3+8x^2-4x-5)+(-11x^3-9x^2+9x+1).$

11. $(6ax+7by+16bx-5ay)+(-3by-3bx+7ax+8ay)+(-13ax-4by-13bx-2ay).$

12. $(16abx-5aby+axy+4bxy)+(-7aby+10abx+5bxy-9axy)+(-26abx+13aby+8axy-9bxy).$

13. $(25a^2x+27b^2x-20ax^2-12by^2)$
$+(13a^2x-13ax^2-23b^2x+5by^2)$
$+(-39a^2x-5b^2x+21ax^2+18by^2)$
$+(a^2x+b^2x+11ax^2-11by^2).$

14. $X=ab+bc-ad+ac,\ Y=ad-ac+bc-ab,$
$Z=ac-bc+ad-ab$ হইলে, $X+Y+Z$-এর মান নির্ণয় কর।

বহুপদ রাশির বিয়োগ

বিয়োজ্য রাশিমালাটিকে বিয়োজনের নীচে এরূপভাবে স্থাপন কর যেন সদৃশ পদগুলি একই স্তম্ভে থাকে। সর্বনিম্নে একটি রেখা টান! এবার মনে মনে বিয়োজ্য রাশিমালার পদগুলির চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া প্রত্যেক স্তম্ভের চিহ্নসহ বীজগণিতীয় যোগফল রেখাটির নীচে লিখিয়া যাও। তাহাই নির্ণেয় বিয়োগফল হইবে।

উদাহরণ 1. $5a^2x+7b^2y+8c^2z+4$ হইতে $9a^2x-4b^2y-3c^2z-5$ বিয়োগ কর।

বিয়োজন→$5a^2x+7b^2y+8c^2z+4$

বিয়োজ্য→$9a^2x-4b^2y-3c^2z-5$

বিয়োফল→ $-4a^2x+11b^2y+11c^2z+9$

উদাহরণ 2. $3{\cdot}5a+6{\cdot}4ab+2{\cdot}7ac-3{\cdot}8ad$ হইতে $2{\cdot}3a-3{\cdot}2ab-1{\cdot}4ac+ad$ বিয়োগ কর।

বিয়োজন→$3{\cdot}5a+6{\cdot}4ab+2{\cdot}7ac-3{\cdot}8ad$

বিয়োজ্য→$2{\cdot}3a-3{\cdot}2ab-1{\cdot}4ac+ad$

বিয়োগফল→$1{\cdot}2a+9{\cdot}6ad+4{\cdot}1ac-4{\cdot}8ad.$

উদাহরণ 3. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল x^3-y^3 হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় রাশি $\equiv (x^3-y^3)-(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)$

$$=x^3-y^3-x^3+3x^2y-3xy^2+y^3$$

$$=3x^2y-3xy^2.$$

প্রশ্নমালা 13

প্রথম রাশি হইতে দ্বিতীয় রাশি বিয়োগ কর ঃ

1. $6a-7b+8c-9d,\ 4a-2b-3c+8d.$

2. $3a^2-9a^2b-9a^2c+4,\ 5a^2+4a^2b-4a^2c-5.$

3. $7ax-14ay-20az+17ab,$

$$3ax+4ay-5az-6ab.$$

4. $a^2b-b^2c-c^2d-d^2f,$

$$2a^2b+3b^2c-4c^2d-2d^2f,$$

5. $x^3-6x^2-5x+1,\ x^3+5x^2-7x+5.$

6. $4{\cdot}6x^3-2{\cdot}5x^2+3{\cdot}4x+2,$

$$3{\cdot}2x^3+2{\cdot}3x^2-1{\cdot}2x+1.$$

7. $\frac{1}{2}a^2-\frac{2}{3}b^2+\frac{3}{4}c^2-\frac{4}{5}d^2,\ \frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}b^2-\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{5}d^2.$

8. $5abc+6bcd-9acd+4ab,$

$$7acd-2abc-4bcd-2ab.$$

9. $6a+7b-8c$ হইতে $a+b-c$ এবং $a-2b-3c$-এর সমষ্টি বিয়োগ কর।

10. $x+2y+3z+4$-এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল $x+y$ হইবে ?

11. $-2x-3y-4z-9$ এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল $x+y+z$ হইবে ?

12. দুইটি রাশির যোগফল $5m^2-9y^2+3n^2+2z^2$; একটি রাশি $2m^2-2n^2-4z^2+y^2$ হইলে অপরটি কত ?

13. $m^3+3m^2n+3mn^2+n^3$ হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল m^3+n^3 হইবে ?

14. $2a^2+3b^2-3c^2+4$-এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল 1 হইবে ?

15. $x=a+b-c-2$; $y=c+a-b+5$,

$z=a-c+b-8$ হইলে $x+y+z=$ কত ?

বহুপদ রাশিকে দ্বিপদ রাশিদ্বারা গুণন

তোমরা পূর্ব অধ্যায়ে গুণের বিচ্ছেদ নিয়ম (Distributive law of Multiplication) শিখিয়াছ, ইহাতে দেখিয়াছ যে—

$$(a+b)x=ax+bx \text{ হয় ।}$$

এই অধ্যায়ে মিশ্র রাশিকে মিশ্র রাশি দ্বারা গুণনের সূত্রগুলি লক্ষ্য কর ।

সূত্র : $(a+b)(x+y)=ax+ay+bx+by.$

প্রমাণ : $(a+b)(x+y)=a(x+y)+b(x+y)$

$$=ax+ay+bx+by.$$

এখানে গুণকের প্রতিটি পদ দ্বারা গুণ্যের প্রতিটি পদ গুণ করা হইয়াছে । লব্ধ গুণফলগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি হইতেছে নির্ণেয় গুণফল ।

নিয়ম :—কোন বহুপদ বিশিষ্ট রাশিমালাকে অপর এক মিশ্র রাশি দ্বারা গুণ করিতে হইলে, গুণকের প্রত্যেক পদ দ্বারা গুণ্যের প্রত্যেক পদকে পৃথক্ পৃথক্ গুণ করিতে হয় । লব্ধ গুণফলগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টিকে নির্ণেয় গুণফল বলে । গুণফল কোনও অক্ষরের ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম বা অধঃক্রম অনুসারে সাজাইতে হয় ।

উদাহরণ 1. $7x^2+5xy-y^2$-কে $3x+5y$ দ্বারা গুণ কর ।

নির্ণেয় গুণফল $= (7x^2+5xy-y^2)(3x+5y)$

$$= 7x^2(3x+5y)+5xy(3x+5y)-y^2(3x+5y)$$
$$= 21x^3+35x^2y+15x^2y+25xy^2-3xy^2-5y^3$$
$$= 21x^3+50x^2y+22xy^2-5y^3.$$

অথবা, গুণ্য $\rightarrow 7x^2+5xy-y^2$

গুণক $\rightarrow 3x+5y$

গুণ্য $\times 3x \rightarrow 21x^3+15x^2y-3xy^2$

গুণ্য $\times 5y \rightarrow \quad +35x^2y+25xy^2-5y^3$

গুণফল $\rightarrow 21x^3+50x^2y+22xy^2-5y^3.$

এখানে গুণ্যের নীচে গুণককে স্থাপন করিয়া গুণ্যকে গুণকের পদগুলির দ্বারা বামদিক হইতে পৃথক্ পৃথক্ গুণ করা হইয়াছে। এই গুণফলগুলিকে একটির নীচে আর একটি এমনভাবে স্থাপন করা হইয়াছে যেন সদৃশ পদগুলি একই স্তম্ভে থাকে। এইবার এইগুলিকে বীজগণিতীয় যোগ করিয়াই নির্ণেয় গুণফল পাওয়া গেল।

প্রশ্নমালা 14

গুণ কর :

1. x^2-xy+y^2-কে $x+y$ দ্বারা।

2. a^2+ab+b^2-কে $a-b$ দ্বারা।

3. $3x^2-2x+4$-কে $3x-4$ দ্বারা।

4. $6x^2-7xy+y^2$-কে $-3x+2y$ দ্বারা।

5. x^3-3x^2+3x-1-কে $x-1$ দ্বারা।

6. $5ab-6bc-7ca+ad$-কে $a-d$ দ্বারা।

7. x^2-1+x^3+x-কে $2x+1$ দ্বারা।

8. $9p^3-3p^2q+3-8pq$-কে $3p-q$ দ্বারা।

9. $10a-2b-3c+4$-কে $2b-c$ দ্বারা।

10. $a^2b-3b^2c+3c^2d-1$-কে $a^2b^2-c^2d^2$ দ্বারা।

11. $x^2-2-2x^3-x+4x^4$-কে $2x-1$ দ্বারা।

12. $4x^2y^2-3xy^3+6x^4-6x^3y+y^4$-কে $2x^2-y^2$ দ্বারা।

বহুপদ বিশিষ্ট রাশিমালাকে একপদ রাশি দ্বারা ভাগ ঃ

তোমরা পূর্ব অধ্যায়ে ভাগের বিচ্ছেদ নিয়ম (Distributive law of Division) শিখিয়াছ। এই নিয়ম অনুসারে—

$$\frac{a+b+c+d}{x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}+\frac{d}{x} \text{ হয়।}$$

নিয়ম ঃ কোন বহুপদ বিশিষ্ট রাশিমালাকে কোন একপদ রাশি দ্বারা ভাগ করিলে যত ভাগফল হয়, বহুপদ রাশিমালার প্রত্যেকটি পদকে উক্ত একপদ রাশি দ্বারা পৃথক্ পৃথক্ ভাগ করিয়া উহাদের বীজগণিতীয় সমষ্টি লইলেও ঠিক তত ভাগফল পাওয়া যায়।

উদাহরণ 1. $8x^5y-12x^4y^4-16x^3y^2+4xy^4$-কে $4xy$ দ্বারা ভাগ কর।

$$\text{নির্ণেয় ভাগফল}=\frac{8x^5y-12x^4y^4-16x^3y^2+4xy^4}{4xy}$$

$$=\frac{8x^5y}{4xy}+\frac{-12x^4y^4}{4xy}+\frac{-16x^3y^2}{4xy}+\frac{4xy^4}{4xy}$$

$$=2x^4-3x^3y^3-4x^2y+y^3.$$

প্রশ্নমালা 15

ভাগ কর :

1. $6a^5b^6 - 12a^4b^3 + 18a^3b^4$-কে $3a^2b$ দ্বারা

2. $-7a^5b^2 + 14a^4b^8 - 21a^8b^9$-কে $-7ab^2$ দ্বারা।

3. $4mn^3 - 8m^3n^2 - 12m^3n^3$-কে $-4mn$ দ্বারা

4. $12m^8n^9 - 18m^7n^6 - 24m^4n^{10}$-কে $6m^3n^4$ দ্বারা

5. $-14x^5y^8 - 21x^6y^9 + 35x^{10}y^4$-কে $-7x^5y^4$ দ্বারা।

6. $15x^2y^2 + 30x^3y^3 - 45x^4y^4 - 60x^5y^5$-কে $15xy$ দ্বারা।

7. $-60x^4y^8 + 90x^9y^7 + 30x^{10}y^8 - 120x^5y^6$-কে $-30x^4y^4$ দ্বারা।

8. $8ab^8c^2 - 24a^2bc^3 + 16ab^3c^4 - 32a^4b^2c^3$-কে $-4abc$ দ্বারা।

9. $-21a^7b^8x^4 + 35a^{10}b^{12}x^5 - 42a^{15}b^7x^9 + 56a^{10}b^{17}x^{15}$-কে $-7a^4b^5x^4$ দ্বারা।

10. $a^8b^9x^7y^6 - a^7b^9x^6y^{12} - a^{18}b^{20}x^8y^9$-কে $-a^6b^7x^5y^6$ দ্বারা ভাগ কর।

11. ভাজ্য $= 100a^7c^7z^7 - 75a^8c^8z^8 + 150a^9c^9z^9 + 200a^{10}c^{10}z^{10}$

ভাজক $= -25a^6c^6z^6$ হইলে, ভাগফল কত ?

12. দুইটি রাশির গুণফল $= 16m^4n^{10} - 8m^7n^{12} + 36m^{15}n^8 - 40m^6n^{17}$;

একটি রাশি, $-4m^4n^8$ হইলে, অপরটি কত ?

ষষ্ঠ অধ্যায়

সরল সূত্রাবলী ও উহাদের প্রয়োগ

[Formulæ and their easy application]

সংজ্ঞা : কোন এক ক্ষেত্রে প্রযুক্ত নিয়ম যদি অনুরূপ সকল ক্ষেত্রে প্রযুক্ত হয়, তাহা হইলে সেই নিয়মটিকে প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করিলে, তাহাকে বলা হয় বীজগণিতীয় সূত্র বা সংক্ষেপে শুধু সূত্র (Formula)। সূত্রের সাহায্যে বীজগণিতীয় যে কোন সিদ্ধান্ত অতি সহজে প্রকাশ করা যাইতে পারে।

সূত্র : $\mathbf{(a+b)^2=(a^2+2ab+b^2)}$

প্রমাণ : $(a+b)^2=(a+b)(a+b)$

$$=a(a+b)+b(a+b)$$
$$=a^2+ab+ab+b^2$$
$$=a^2+2ab+b^2$$

সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, দুইটি রাশির সমষ্টির বর্গ

= প্রথম রাশির বর্গ + রাশিদ্বয়ের গুণফলের দ্বিগুণ

+ দ্বিতীয় রাশির বর্গ।

অনুসিদ্ধান্ত : $\mathbf{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.}$

প্রমাণ : $(a+b+c)^2=\{(a+b)+c\}^2$

$$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ca+2bc+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.$$

অনুসিদ্ধান্ত : $\mathbf{a^2+b^2=(a+b)^2-2ab}$

প্রমাণ : $a^2+b^2=a^2+2ab+b^2-2ab.$

$$\therefore\quad a^2+b^2=(a+b)^2-2ab.$$

উদাহরণ 1. $3a+4b$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(3+4b)^2=(3a)^2+2.(3a).(4b)+(4b)^2$$
$$=9a^2+24ab+16b^2.$$

উদাহরণ 2. a^2x+2b^2y এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(a^2x+2b^2y)^2=(a^2x)^2+2.(a^2x)(2b^2y)+(2b^2y)^2$$
$$=a^4x^2+4a^2b^2xy+4b^4y^2.$$

উদাহরণ 3. $x+\frac{1}{x}$-এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=(x)^2+2.(x).\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x}\right)^2$$
$$=x^2+2+\frac{1}{x^2}$$
$$=x^2+\frac{1}{x^2}+2.$$

উদাহরণ 4. $2a+3b+4c$-এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(2a+3b+4c)^2=\{(2a+3b)+(4c)\}^2$$
$$=(2a+3b)^2+2.(2a+3b).(4c)+(4c)^2$$
$$=(2a)^2+2(2a).(3b)+(3b)^2+8c.(2a+3b)+16c^2$$
$$=4a^2+12ab+9b^2+16ac+24bc+16c^2$$
$$=4a^2+9b^2+16c^2+12ab+24bc+16ac.$$

উদাহরণ 5. $a+2b+3c+4d$-এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(a+2b+3c+4d)^2=\{(a+2b)+(3c+4d)\}^2$$
$$=(a+2b)^2+2.(a+2b).(3c+4d)+(3c+4d)^2$$
$$=(a^2+4ab+4b^2)+2(3ac+4ad+6bc+8bd)$$
$$+(9c^2+24cd+16d^2$$

$$= a^2 + 4ab + 4b^2 + 6ac + 8ad + 12bc + 16bd + 9c^2 + 24cd + 16d^2$$

$$= a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 16d^2 + 4ab + 6ac + 8ad + 12bc + 16bd + 24cd.$$

উদাহরণ 6. $25x^2 + 10xy + y^2$-কে একটি পূর্ণবর্গ রূপে প্রকাশ কর।

$$25x^2 + 10xy + y^2 = (5x)^2 + 2.(5x).(y) + (y)^2$$
$$= (5x + y)^2.$$

উদাহরণ 7. $a = 2, b = 3$ হইলে, $16a^2 + 40ab + 25b^2$-এর মান নির্ণয় কর।

$$16a^2 + 40ab + 25b^2 = (4a)^2 + 2.(4a).(5b) + (5b)^2$$
$$= (4a + 5b)^2$$
$$= \{4(2) + 5(3)\}^2 \quad [\text{ মান বসাইয়া }]$$
$$= (8 + 15)^2 = (23)^2 = 529.$$

উদাহরণ 8. সরল কর :

$$(2x^2 - 3y^3 + 4z^4)^2 + (2x^2 + 3y^3 - 4z^4)^2 + 2(2x^2 - 3y^3 + 4z^4)(2x^2 + 3y^3 - 4z^4).$$

$2x^2 - 3y^3 + 4z^4 = a$ এবং $2x^2 + 3y^3 - 4z^4 = b$ ধরিলে,

প্রদত্ত রাশিমালা $\equiv a^2 + b^2 + 2ab$
$$= (a + b)^2$$

মান বসাইয়া $= (2x^2 - 3y^3 + 4z^4 + 2x^2 + 3y^3 - 4z^4)^2$
$$= (4x^2)^2 = 16x^4.$$

উদাহরণ 9. $a + b = 13,\ ab = 42$ হইলে, $a^2 + b^2 =$ কত ?

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 13^2 - 84 = 169 - 84 = 85.$$

প্রশ্নমালা 16

বর্গ নির্ণয় কর (Find the Square of):

1. $(3+2)$.
2. $(7+3)$.
3. $(2x+2)$.
4. $2y^2+3$
5. x^2y+xy^2.
6. $4x^2y^2+5xy^3$.
7. $2a^3+7ab^2$.
8. a^4b+xp^3.
9. p^2q+pq^3.
10. $6ax+2byz$.
11. $\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}$.
12. $\frac{1}{2x}+\frac{3}{4y}$.
13. $a^2+b^2+c^2$.
14. $4x^2+5y^2+z^2$.
15. $ax+by+cz$.
16. $a^2b+b^2c+c^2d$.
17. $x^2+y^2+m^2+n^2$.
18. $a+2b+3c+4$.
19. $2x^2+m^2+2y^2+p^2$.
20. $a^2b+b^2c+c^2d+d^2e$.

পূর্ণবর্গরূপে প্রকাশ কর:

21. a^2+4a+4.
22. $4x^2+12xy+9y^2$.
23. $25a^2+10a+1$.
24. $16+8x+x^2$.
25. $49a^2b^2+28abcd+4c^2d^2$.
26. $81p^2+72pq+16q^2$.
27. $64m^4+32m^2n^2+4n^4$.

মান নির্ণয় কর:

28. $64x^2+16x+1$, যখন $x=2$.
29. $m^2+10m+25$, যখন $m=-4$.

30. $240 \times 240 + 480 \times 360 + 360 \times 360.$

31. $1{\cdot}57 \times 1{\cdot}57 + 1{\cdot}57 \times 4{\cdot}86 + 2{\cdot}43 \times 2{\cdot}43.$

32. $81a^2 + 180ab + 100b^2$ যখন $a = 10$ এবং $b = -8.$

33. $a + b = 5,\ ab = 6$ হইলে, $a^2 + b^2 =$ কত ?

34. $x + y = 9,\ xy = 20$ হইলে, $x^2 + y^2$ কত ?

35. $x^2 + y^2 + z^2 = 29,\ xy + yz + zx = 26$ হইলে,
$x + y + z =$ কত ?

36. $a + b + c = 9,\ a^2 + b^2 + c^2 = 31$ হইলে,
$ab + bc + ca =$ কত ?

সরল কর ঃ

37. $(m+n)^2 + 2(m+n)(m-n) + (m-n)^2.$

38. $(x+2y-3z)^2 + 2(x+2y-3z)(x-2y+3z)$
$+ (x-2y+3z)^2.$

39. $(5x+8b-4m)^2 + (4m-7b-4x)^2$
$+ 2(5x+8a-4m)(4m-7b-4x).$

40. $(a-b+c-d)^2 + (a+b-c+d)^2$
$+ 2(a-b+c-d)(a+b-c+d).$

41. $(p+2q-3m-4n)^2 + 2(p+2q-3m-4n)$
$\times (3m+4n-q) + (3m+4n-q)^2.$

42. $(xy+yz-zx)^2 + (yz-xy+zx)^2$
$+ 2(xy+yz-zx)(yz-xy+xz).$

সূত্র ঃ 2. $\mathbf{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}.$

প্রমাণ ঃ $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$

$$= a(a-b) - b(a-b)$$

$$= a^2 - ab - ab + b^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2.$$

অতএব দুইটি রাশির অন্তরের বর্গ = প্রথম রাশির বর্গ − রাশি দুইটির গুণফলের দ্বিগুণ + দ্বিতীয় রাশির বর্গ।

অনুসিদ্ধান্ত : $\mathbf{a^2+b^2=(a-b)^2+2ab}$

প্রমাণ : $a^2+b^2=a^2-2ab+b^2+2ab$

$\therefore\quad a^2+b^2=(a-b)^2+2ab.$

অনুসিদ্ধান্ত : $\mathbf{a^2+b^2=\dfrac{(a+b)^2}{2}+\dfrac{(a-b)^2}{2}}$

অনুসিদ্ধান্ত : $\mathbf{4ab=(a+b)^2-(a-b)^2}$

অনুসিদ্ধান্ত : $\mathbf{ab=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2}$

অনুসিদ্ধান্ত : $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

অনুসিদ্ধান্ত : $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

[সূত্র হইতে যোগ, বিয়োগ ও পক্ষান্তর করিয়া অনুসিদ্ধান্তগুলি পাওয়া যায়।]

উদাহরণ 1. 27-এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}(27)^2&=(30-3)^2=(30)^2-2.30.3+(3)^2\\&=900-180+9\\&=729.\end{aligned}$$

উদাহরণ 2. $2x-3y$-এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}(2x-3y)^2&=(2x)^2-2.(2x)(3y)+(3y)^2\\&=4x^2-12xy+9y^2.\end{aligned}$$

উদাহরণ 3. x^2y-y^2z-এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}(x^2y-y^2z)^2&=(x^2y)^2-2(x^2y).(y^2z)+(y^2z)^2\\&=x^4y^2-2x^2y^3z+y^4z^2.\end{aligned}$$

উদাহরণ 4. $2x-\frac{1}{2x}$-এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^2=(2x)^2-2.(2x)\left(\frac{1}{2x}\right)+\left(\frac{1}{2x}\right)^2$$

$$=4x^2-2+\frac{1}{4x^2} \qquad =4x^2+\frac{1}{4x^2}-2.$$

উদাহরণ 5. $(a+b-c)$-এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}(a+b-c)^2&=\{(a+b)-(c)\}^2\\&=(a+b)^2-2.(a+b)(c)+(c)^2\\&=(a^2+2ab+b^2)-2(ac+bc)+c^2\\&=a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2\\&=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc.\end{aligned}$$

উদাহরণ 6. $2a+3b-4c$-এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(2a+3b-4c)^2=\{(2a+3b)-(4c)\}^2$$

$$=(2a+3b)^2-2(2a+3b)(4c)+(4c)^2$$

$$=(4a^2+12ab+9b^2)-2(8ac+12bc)+16c^2$$

$$=4a^2+12ab+9b^2-16ac-24bc+16c^2$$

$$=4a^2+9b^2+16c^2+12ab-16ac-24bc.$$

উদাহরণ 7. $x-y-m+n$-এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(x-y-m+n)^2=\{(x-y)-(m-n)\}^2$$

$$=(x-y)^2-2(x-y)(m-n)+(m-n)^2$$

$$=x^2-2xy+y^2-2(xm-xn-ym+yn)$$
$$+m^2-2mn+n^2$$

$$=x^2-2xy+y^2-2xm+2xn+2ym-2yn+m^2$$
$$-2mn+n^2$$

$$=x^2+y^2+m^2+n^2-2xy-2xm+2xn+2ym$$
$$-2yn-2mn.$$

উদাহরণ 8. $4x^2-4x+1$-কে পূর্ণ বর্গরূপে প্রকাশ কর।

$$4x^2-4x+1=(2x)^2-2.2x.1+(1)^2$$
$$=(2x-1)^2.$$

উদাহরণ 9. সূত্রের সাহায্যে সরল কর:

$6·725\times6·725-6·725\times7·450+3·725\times3·725$

প্রদত্ত রাশিমালা $=6·725\times6·725-6·725\times7·450+3·725\times3·725$

$=6·725\times6·725-2\times6·725\times3·725+3·725\times3·725$

$=(6·725)^2-2(6·725)(3·725)+(3·725)^2$

$=(6·725-3·725)^2=(3)^2=9.$

উদাহরণ 10. $a=4,\ b=2$ হইলে, $4a^2-12ab+9b^2$-এর মান নির্ণয় কর।

$$4a^2-12ab+9b^2=(2a)^2-2.2a.3b+(3b)^2$$
$$=(2a-3b)^2$$
$$=(2.4-3.2)^2$$
$$=(8-6)^2=(2)^2=4.$$

উদাহরণ 11. সরল কর:

$(2x-3y+4z)^2-2(2x-3y+4z)(x-3y+4z)+(x-3y+4z)^2$

$2x-3y+4z=a$ এবং $x-3y+4z=b$ ধরিলে

প্রদত্ত রাশিমালা $=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

a, b এর মান বসাইয়া $=\{(2x-3y+4z)-(x-3y+4z)\}^2$

$=\{2x-3y+4z-x+3y-4z\}^2.$

$=(x)^2=x^2.$

প্রশ্নমালা 17

বর্গ নির্ণয় কর :

1. 96 2. 48 3. $x-1$
4. $2x-4$ 5. $3m-2n$ 6. $3x^2-y^2$
7. p^2q^3-q 8. xp^3-yq^2 9. $abc-pq$
10. a^2-pq^3 11. $x-\frac{1}{x}$ 12. $\frac{5}{6a}-\frac{3}{5b}$
13. $-x-y$ 14. $-3a-4b$ 15. $x-2y-3z$
16. $2x-2y-z$ 17. $a^2-2b^2-3c^2$
18. $2p+5q-6r$ 19. $a+b-c+d$
20. $m^2-n^2-c^2+d^2$.

পূর্ণবর্গ রূপে প্রকাশ কর :

21. $9x^2-6x+1$ 22. $x^4-2x^2y^2+y^4$
23. $25p^2q^2-30pq+9$ 24. $36a^2b^2-24abc^2+4c^4$
25. $4x^2-2x+\frac{1}{4}$

মান নির্ণয় কর :

26. $4956\times4956-2\times4956\times4946+4946\times4946$.
27. $4{\cdot}73\times4{\cdot}73-2\times4{\cdot}73\times3{\cdot}83+3{\cdot}83\times3{\cdot}83$
28. $16a^2-24a+9$ যখন $a=5$
29. $25x^2-40x+16$ যখন $x=3$
30. $4p^2-20pq+25q^2$ যখন $p=6$ এবং $q=2$.

সরল কর :

31. $(a+b-c)^2-2(a+b-c)(b-a-c)+(b-a-c)^2$
32. $(4x-y-z)^2-2(4x-y-z)(x-y-z)+(x-y-z)^2$

33. $(2x^3+4y^3+7)^2+(2x^3-3y^3+7)^2$
$-2(2x^3+4y^3+7)(2x^3-3y^3+7)$

34. $(x^2y^2+y^2z^2-z^2x^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2-z^2x^2)$
$(y^2z^2-z^2x^2)+(y^2z^2-z^2x^2)^2$

বীজগণিতীয় সূত্রের সাহায্যে মান নির্ণয়

তোমরা ইতিপূর্বে নিম্নলিখিত অনুসিদ্ধান্তগুলি শিখিয়াছ :

1. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab.$
2. $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab.$
3. $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab.$
4. $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab.$
5. $a^2+b^2=\dfrac{(a+b)^2}{2}+\dfrac{(a-b)^2}{2}$
6. $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

উদাহরণ 1. $x+y=6$ এবং $xy=7$ হইলে x^2+y^2 এর মান নির্ণয় কর।

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(6)^2-2.7$$
$$=36-14=22.$$

উদাহরণ 2. $x+\dfrac{1}{x}=5$ হইলে $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$x^2+\frac{1}{x^2}=(x)^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2$$
$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2.x.\frac{1}{x}$$
$$=(5)^2-2=25-2=23.$$

উদাহরণ 3. $a-b=8$ এবং $ab=11$ হইলে a^2+b^2 এর মান নির্ণয় কর।

$$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$$
$$=(8)^2+2.11=64+22=86.$$

উদাহরণ 4. $c+d=3$ এবং $cd=2$ হইলে $(c-d)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

$$(c-d)^2=(c+d)^2-4cd=(3)^2-4.2$$
$$=9-8=1.$$

উদাহরণ 5. $x+y=5$ এবং $xy=4$ হইলে $x-y$ এর মান নির্ণয় কর।

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$$
$$=(5)^2-4.4=25-16=9.$$
$$\therefore\quad x-y=\sqrt{9}=3.$$

উদাহরণ 6. $p-q=1$ এবং $pq=6$ হইলে $(p+q)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

$$(p+q)^2=(p-q)^2+4pq$$
$$=(1)^2+4.6$$
$$=1+24=25.$$

উদাহরণ 7. $a-b=2$ এবং $ab=3$ হইলে $a+b$ এর মান নির্ণয় কর।

$$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$$
$$=(2)^2+4.3=4+12=16$$
$$\therefore\quad a+b=\sqrt{16}=4.$$

প্রশ্নমালা 18

1. $a+b=5$ এবং $ab=12$ হইলে, a^2+b^2 এর মান নির্ণয় কর।
2. $x+y=7$ এবং $xy=5$ হইলে, x^2+y^2 এর মান নির্ণয় কর।
3. $p+\frac{1}{p}=6$ হইলে $p^2+\frac{1}{p^2}=$ কত ?
4. $a+\frac{1}{a}=m$ হইলে $a^3+\frac{1}{a^3}$ এর মান কত ?
5. $a-b=7$ এবং $ab=14$ হইলে, a^2+b^2 এর মান নির্ণয় কর।
6. $m-n=10$ এবং $mn=30$ হইলে, m^2+n^2 এর মান নির্ণয় কর।
7. $x-\frac{1}{x}=12$ হইলে, $x^2+\frac{1}{x^2}$ এর মান কত ?
8. $z-\frac{1}{z}=5$ হইলে, $z^2+\frac{1}{z^2}$ এর মান কত ?
9. $b+c=7$ এবং $bc=11$ হইলে. $(b-c)^2$ এর মান কত ?
10. $y+z=6$ এবং $yz=7$ হইলে, $(y-z)^2$ এর মান কত ?
11. $a+b=8$ এবং $ab=7$ হইলে, $(a-b)$ এর মান নির্ণয় কর।
12. $c+d=10$ এবং $cd=21$ হইলে, $c-d$ এর মান নির্ণয় কর।
13. $y-z=5$ এবং $yz=12$ হইলে, $(y+z)^2$ এর মান কত ?
14. $x-y=12$ এবং $xy=64$ হইলে, $(x+y)^2$ এর মান কত ?

15. $m-n=2$ এবং $mn=8$ হইলে, $m+n$ এর মান কত ?

16. $a-b=6$ এবং $ab=7$ হইলে $a+b$ এর মান কত ?

17. $5p-\frac{1}{5p}=6$ হইলে, $\left(5p+\frac{1}{5p}\right)^2=$ কত ?

18. $x+\frac{1}{x}=a$ হইলে প্রমাণ কর যে, $x^2+\frac{1}{x^2}=a^2-2$.

19. $a+b=6$ এবং $a-b=4$ হইলে, a^2+b^2 এর মান নির্ণয় কর।

20. $x+y=7$ এবং $x-y=5$ হইলে, $x^2+y^2=$ কত ?

সূত্র : $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2$.

প্রমাণ : $(a+b)(a-b)=a(a-b)+b(a-b)$

$$=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$$

অতএব, দুইটি রাশির সমষ্টি ও অন্তরের গুণফল রাশি দুইটির বর্গদ্বয়ের অন্তরের সমান।

উদাহরণ 1. $(4a+5b)$-কে $(4a-5b)$ দ্বারা গুণ কর।

$$(4a+5b)(4a-5b)=(4a)^2-(5b)^2$$
$$=16a^2-25b^2.$$

উদাহরণ 2. $a+2b$, $a-2b$ এবং a^2+4b^2-এর ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর।

$$(a+2b)(a-2b)(a^2+4b^2)=\{(a)^2-(2b)^2\}(a^2+4b^2)$$
$$=(a^2-4b^2)(a^2+4b^2)=(a^2)^2-(4b^2)^2=a^4-16b^4.$$

উদাহরণ 3. $a+b+c$-কে $a+b-c$ দ্বারা গুণ কর।

$$(a+b+c)(a+b-c)=\{(a+b)+(c)\}\{(a+b)-(c)\}$$
$$=(a+b)^2-(c)^2=a^2+2ab+b^2-c^2$$

উদাহরণ 4. m^2+mn+n^2-কে m^2-mn+n^2 দ্বারা গুণ কর।

$$(m^2+mn+n^2)\times(m^2-mn+n^2)$$
$$=\{(m^2+n^2)+(mn)\}\{(m^2+n^2)-(mn)\}$$
$$=(m^2+n^2)^2-(mn)^2$$
$$=m^4+2m^2n^2+n^4-m^2n^2$$
$$=m^4+m^2n^2+n^4$$

উদাহরণ 5. 520×480 এর মান নির্ণয় কর।

$$520\times 480=(500+20)\times(500-20)$$
$$=(500)^2-(20)^2$$
$$=250000-400=249600.$$

উদাহরণ 6. সরল কর : $\dfrac{4538\times 4538-4278\times 4278}{4538+4278}$

4538-কে a এবং 4278-কে b ধরিলে

প্রদত্ত রাশিমালা $=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}=\dfrac{(a+b)(a-b)}{(a+b)}$

$=a-b$

মান বসাইয়া $=4538-4278=260.$

প্রশ্নমালা 19

সূত্রের সাহায্যে গুণফল নির্ণয় কর :

1. $(a+2)(a-2)$
2. $(a+3b)(a-3b)$
3. $(3a+4)(3a-4)$
4. $(ab+cd)(ab-cd)$
5. $(x^2y+abc)(x^2y-abc)$
6. $(m^2-n^2)(m^2+n^2)$

7. $(p^2q-pq^2)(p^2q+pq^2)$

8. $(a^2bc+xyz)(a^2bc-xyz)$

9. $(2m^2pq+3mm)(2m^2pq-3mn)$

10. $(a+1)(a-1)(a^2+1)$

11. $(x^2+y^2)(x^2-y^2)(x^4+y^4)$

12. $(2a-3b)(2a+3b)(4a^2+9b^2)$

13. $(x+y+z)(x+y-z)$ **14.** $(x-y+z)(x-y-z)$

15. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

16. $(ab-bc+ca)(ab+bc-ca)$

17. $(a^2+2ab+b^2)(a^2-2ab+b^2)$

18. $(x^4y^4-x^2y^2+1)(x^4y^4+x^2y^2+1)$

সূত্রের সাহায্যে মান নির্ণয় কর :

19. 307×293 **20.** 516×484 **21.** 625×575

সূত্রের সাহায্যে সরল কর :

22. $87 \times 87 - 77 \times 77$

23. $4932 \times 4932 - 4923 \times 4923$

24. $\dfrac{2345 \times 2345 - 2135 \times 2135}{2345 + 2135}$

25. $\dfrac{7892 \times 7892 - 4522 \times 4522}{7892 - 4522}$

সপ্তম অধ্যায়

সূত্রের সাহায্যে উৎপাদক নির্ণয়

সূত্র : (1) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(a+b)(a+b).$

(2) $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=(a-b)(a-b).$

(3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b).$

উদাহরণ 1. $9x^2+12xy+4y^2$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}9x^2+12xy+4y^2&=(3x)^2+2.3x.2y+(2y)^2\\&=(3x+2y)^2\\&=(3x+2y)(3x+2y)\end{aligned}$$

উদাহরণ 2. $x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2=(x)^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2+2.x.\frac{1}{x}$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

উদাহরণ 3. $25m^2-40mn+16n^2$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}25m^2-40mn+16n^2&=(5m)^2-3.5m.4n+(4n)^2\\&=(5m-4n)^2\\&=(5m-4n)(5m-4n).\end{aligned}$$

উদাহরণ 4. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $(a+2b+3c)^2-(a-2b-c)^2$

$$\begin{aligned}&(a+2b+3c)^2-(a-2b-c)^2\\&=\{(a+2b+3c)+(a-2b-c)\}\{(a+2b+3c)-(a-2b-c)\}\\&=\{a+2b+3c+a-2b-c\}\{a+2b+3c-a+2b+c\}\\&=(2a+2c)(4b+4c)=2(a+c).4(b+c)=8(a+c)(b+c)\end{aligned}$$

উদাহরণ 5. $(a+b)^2-16c^2$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$(a+b)^2-16c^2=(a+b)^2-(4c)^2$$
$$=(a+b+4c)(a+b-4c).$$

উদাহরণ 6. a^4+64 এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$a^4+64=(a^2)^2+(8)^2$$
$$=(a^2)^2+(8)^2+2a^2.8-16a^2$$
$$=(a^2+8)^2-(4a)^2$$
$$=(a^2+8+4a)(a^2+8-4a).$$
$$=(a^2+4a+8)(a^2-4a+8)$$

উদাহরণ 7. $a^4b^4+a^2b^2+1$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$a^4b^4+a^2b^2+1=(a^2b^2)^2+2.a^2b^2.1+(1)^2-a^2b^2$$
$$=(a^2b^2+1)^2-(ab)^2$$
$$=(a^2b^2+1+ab)(a^2b^2+1-ab)$$
$$=(a^2b^2+ab+1)(a^2b^2-ab+1).$$

উদাহরণ 8. $4x^2+12xy+9y^2-c^2$-এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$4x^2+12xy+9y^2-c^2=(2x)^2+2.2x.3y+(3y)^2-c^2$$
$$=(2x+3y)^2-(c)^2$$
$$=(2x+3y+c)(2x+3y-c).$$

উদাহরণ 9. a^4-b^4 এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$a^4-b^4=(a^2)^2-(b^2)^2$$
$$=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$$
$$=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$$

প্রশ্নমালা 20

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $25a^2+10a+1$.
2. $a^2+16ab+64b^2$.
3. $a^4-12a^2b^2+36b^4$.
4. $a^2b^2-2abcd+c^2d^2$.
5. $x^2+20xy+100y^2$.
6. $x^6-6x^3y+9y^2$.
7. $9x^4-30x^2y^2+25y^4$.
8. $1+10y^2+25y^4$.
9. $a^2+\dfrac{1}{a^2}+2$.
10. $\dfrac{1}{9p^2}+9p^2-2$.
11. $(5a+3c)^2-(4a-2c)^2$.
12. $(8x^2-5y^2)^2-(5x^2-2y^2)^2$.
13. $(a+b-c)^2-(3a-4b-5c)^2$.
14. $(x+y-3z)^2-(y-7z)^2$.
15. $9x^2-(a+b)^2$.
16. $15a^2b^2-(3a+4b)^2$.
17. $25x^4-(p^2+q^2)^2$.
18. $49a^4b^4-(m^2+n^2)^2$.
19. $(a+b)^2-9c^2$.
20. $(a^2+b^2)^2-16b^2c^2$.
21. $(x+p)^2-64a^2b^2c^2$.
22. $(a^2+p^2)^2-81x^4$.
23. a^2-4b^2.
24. a^4-16c^4.
25. $4x^2-9z^2$.
26. $16x^4-81y^4$.
27. $a^4y^4-49b^2$.
28. $121-9x^2$.
29. $4x^2y^2-29b^2c^2$.
30. $54p^2q^2-9x^4y^4$.
31. x^4-1.
32. a^4-16.
33. $a^4x^4-64b^4$.
34. a^4+4x^4.
35. x^4+64.
36. $4x^4+81$.
37. a^4+a^2+1.
38. $9x^4-25x^2+16$.
39. $x^2+2xy+y^2-16a^2$.
40. $x^2+4y^2-4xy-9z^2$.
41. $a^2-2bc+2ab-c^2$.
42. $(x^2-2x)-(y^2-2y)$.
43. $a^2b^2+c^2d^2+4abcd-a^2c^2-b^2d^2$.
44. $a(a-b-c)+b(b+c-a)+c(a-b-c)$.
45. $625+4x^4$.

অষ্টম অধ্যায়

সরল সমীকরণ ও তৎসংক্রান্ত প্রশ্নাবলীর সমাধান

সমীকরণ : সমতা চিহ্ন (=) দ্বারা সংযুক্ত দুইটি রাশি যদি এরূপ হয় যে উহাদের অন্তর্গত একটি অজ্ঞাত রাশির কোন নির্দিষ্ট মানের দ্বারা উহাদের সমতা সিদ্ধ হয়, তবে রাশি দুইটির এই প্রকার সমতাকে সমীকরণ বলা হয়।

সমতা চিহ্নের উভয় পার্শ্বে অবস্থিত রাশি দুইটিকে সমীকরণের পার্শ্ব বা পক্ষ (side) বলে। সমতা চিহ্নের বামপক্ষে অবস্থিত রাশিটিকে বামপক্ষ (Left side) এবং ডানপার্শ্বে অবস্থিত রাশিটিকে ডানপক্ষ বা দক্ষিণপক্ষ (Right side) বলে। যথা, $5x+2=27$. একটি সমীকরণ, কারণ x-এর মান 5 হইলে উভয়পক্ষের মান সমান হয়। কিন্তু x-এর মান যদি 5 ছাড়া অন্য কোন সংখ্যা হয় তাহা হইলে উভয়পক্ষের সম্বন্ধ সিদ্ধ হইতে পারে না। অতএব এখানে x-এর নির্দিষ্ট মান হইতেছে 5. $x=5$, এই নির্দিষ্ট মানের দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইতেছে বলিয়া x অক্ষরটিকে বলে অজ্ঞাত রাশি।

অজ্ঞাত রাশির যে নির্দিষ্ট মানের দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, তাহাকে ঐ সমীকরণের বীজ (root) বলে। এখানে $x=5$ এই মানের দ্বারা $5x+2=27$ এই সমীকরণটি সিদ্ধ হইতেছে। অতএব এখানে 5 হইতেছে এই সমীকরণটির বীজ (root)। সাধারণতঃ x, y, z প্রভৃতি অক্ষরদ্বারা অজ্ঞাত রাশি এবং 1, 2, 3, বা a, b, c প্রভৃতি দ্বারা জ্ঞাতরাশি প্রকাশ করা হয়।

সরল সমীকরণ : যদি কোন সমীকরণ এইরূপ হয় যে, উহাতে প্রথমঘাত বিশিষ্ট একটিমাত্র অজ্ঞাত রাশি থাকে, তবে এইরূপ

সমীকরণকে একবর্ণ সরল সমীকরণ বা সরল সমীকরণ (Simple equation or Linear equation) বলে। এইরূপ সমীকরণে একটিমাত্র অজ্ঞাত রাশি থাকে এবং এই অজ্ঞাত রাশির প্রতীক হিসাবে সাধারণতঃ x অক্ষরটি ব্যবহৃত হয়।

$9x+4=49$ একটি সরল সমীকরণ। কারণ এখানে একটিমাত্র অজ্ঞাত রাশি 'x' রহিয়াছে এবং উহা প্রথম ঘাতবিশিষ্ট।

বিভিন্ন আকারের সরল সমীকরণ রহিয়াছে :

(i) সরল সমীকরণের প্রথম রূপ হইল $ax=b$, এখানে x অজ্ঞাত রাশি, a অজ্ঞাত রাশির সহগ এবং b জ্ঞাত রাশি। ইহার অর্থ, কোন সহগযুক্ত অজ্ঞাত রাশির মান জ্ঞাত রাশির সমান।

(ii) সরল সমীকরণের দ্বিতীয় রূপ $ax+b=c$, এখানে a, b, c তিনটি জ্ঞাত রাশি। এইরূপ সমীকরণে কোন সহগযুক্ত অজ্ঞাত রাশির সহিত কোন জ্ঞাত রাশির যোগফল অপর একটি জ্ঞাত রাশির সমান।

(iii) আর এক শ্রেণীর সরল সমীকরণ-এর রূপ হইল $ax+b=cx+d$, এখানে a, b, c, d প্রত্যেকেই জ্ঞাত রাশি। এইরূপ সমীকরণে কোন সহগযুক্ত অজ্ঞাত রাশির সহিত কোন জ্ঞাতরাশি যোগ করিলে যে যোগফল উৎপন্ন হয়, তাহা অপর এক সহগযুক্ত অজ্ঞাত রাশির সহিত অপর এক জ্ঞাত রাশির যোগফলের সমান হয়।

পক্ষান্তরকরণ (Transposition) : কোন সমীকরণের অন্তর্গত যে-কোন রাশির যুক্ত বা বিযুক্ত চিহ্নের পরিবর্তন করিয়া ঐ রাশিকে অপর পক্ষে স্থানান্তরিত করণকে পক্ষান্তর প্রক্রিয়া বলে।

সরল সমীকরণের সমাধান (Solution of Simple equations)ঃ সরল সমীকরণকে সমাধান করিতে হইলে প্রথমে অজ্ঞাত রাশিযুক্ত পদ বা পদগুলিকে বামদিকে এবং জ্ঞাত পদগুলিকে ডানদিকে রাখিতে হয়। অতঃপর অজ্ঞাত রাশির সহগ দ্বারা জ্ঞাত রাশিকে ভাগ করিলে লব্ধ ভাগফল হয় সমীকরণের নির্ণেয় বীজ। সমীকরণের সমাধান নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধান্তগুলির উপর নির্ভর করে ঃ

(1) সমান সমান রাশির সহিত সমান সমান রাশি যোগ করিলে যোগফলগুলি পরস্পর সমান হয়।

(2) সমান সমান রাশি হইতে সমান সমান রাশি বিয়োগ করিলে বিয়োগগুলি পরস্পর সমান হয়।

(3) সমান সমান রাশিকে 0 ভিন্ন সমান সমান রাশি দ্বারা গুণ করিলে গুণফলগুলি পরস্পর সমান হয়।

(4) সমান সমান রাশিকে 0 ভিন্ন সমান সমান রাশি দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফলগুলি পরস্পর সমান হয়।

নিম্নের উদাহরণগুলি লক্ষ্য কর।

উদাহরণ 1. সমাধান কর ঃ $3x=9$

$\therefore \quad \frac{3x}{3}=\frac{9}{3}$ (উভয়পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করিয়া) $\therefore \quad x=3.$

উদাহরণ 2. সমাধান কর ঃ $4x+3=23$

অথবা, $4x+3-3=23-3$ (উভয় পক্ষ হইতে 3 বিয়োগ করিয়া)

অথবা, $4x=20$

অথবা, $x=\frac{20}{4}$ (উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা ভাগ করিয়া) $\therefore \quad x=5.$

উদাহরণ 3. সমাধান কর : $2x+4=x+24$

$$2x+4=x+24$$

বা, $2x+4-x=x+24-x$ (উভয় পক্ষ হইতে x বিয়োগ করিয়া)

বা, $x+4=24$ বা, $x=24-4=20.$

উদাহরণ 4. সমাধান কর :—$3(2x-4)=2(x+8)$

বা, $6x-12=2x+16$ বা, $6x-2x=16+12$

বা, $4x=28$ বা, $x=\frac{28}{4}=7$

উদাহরণ 5. একটি সংখ্যার তিন গুণের সহিত 10 যোগ করিলে যোগফল ঐ সংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা 25 বেশী হয়। সংখ্যাটি কত ?

ধরা গেল, নির্ণেয় সংখ্যাটি $=x$

শর্তানুসারে $3x+10=2x+25$

বা, $3x-2x=25-10$ বা, $x=15$ সংখ্যাটি $=15.$

উদাহরণ 6. চারিটি ক্রমিক সংখ্যার যোগফল 90 হইলে, সংখ্যা চারিটি নির্ণয় কর।

ধরা গেল, প্রথম সংখ্যাটি $=x$

$\therefore$ দ্বিতীয় „ $=x+1$

$\therefore$ তৃতীয় „ $=x+2$

$\therefore$ চতুর্থ „ $=x+3$

সংখ্যা চারিটির যোগফল $=4x+6$

শর্তানুসারে $4x+6=90$

বা, $4x=90-6$ বা, $4x=84$ বা, $x=\frac{84}{4}=21$

$\therefore$ প্রথম সংখ্যাটি $=21,$ দ্বিতীয় সংখ্যাটি $=21+1=22,$

তৃতীয় সংখ্যাটি $=21+2=23,$ চর্থতু সংখ্যাটি $=21+3=24.$

উদাহরণ 7. পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের সমষ্টি 46 বৎসর। দুই বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 4 গুণ হইবে। পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স কত ?

ধরা গেল, পিতার বর্তমান বয়স $= x$ বৎসর।

$\therefore$ পুত্রের " " $= (46 - x)$ বৎসর

দুই বৎসর পরে পিতার বয়স হইবে $(x+2)$ বৎসর।

দুই " " পুত্রের " " $(46 - x + 2)$ বৎসর

প্রশ্নানুসারে, $x + 2 = 4(48 - x)$

বা, $x + 2 = 192 - 4x$

বা, $x + 4x = 192 - 2$ বা, $5x = 190$

$\therefore$ পিতার বর্তমান বয়স $= 38$ বৎসর।

পুত্রের " " $= (46 - 38)$ বৎসর। $= 8$ বৎসর।

উদাহরণ 8. 50 জন বালক-বালিকাকে 20 টাকা এরূপ ভাবে ভাগ করিয়া দাও যেন প্রত্যেক বালক 50 পয়সা ও প্রত্যেক বালিকা 25 পয়সা পায়। বালক-বালিকার সংখ্যা কত ?

ধরা গেল, বালকের সংখ্যা $= x$ জন।

$\therefore$ বালিকার সংখ্যা $= (50 - x)$ জন।

প্রত্যেক বালক 50 পয়সা হিসাবে x জন বালক পায় $= 50x$ পয়সা।

" বালিকা 25 " " $(50 - x)$ জন বালিকা পায়

$= 25(50 - x)$ পয়সা $= (1250 - 25x)$ পয়সা

মোট খরচ $= 20$ টাকা $= 2000$ পয়সা।

প্রশ্নানুসারে, $50x + 1250 - 25x = 2000$

বা, $25x = 2000 - 1250$

বা, $25x = 750$ বা, $x = \frac{750}{25} = 30$

অতএব বালক $= 30$ জন। বালিকা $= (50 - 30)$ জন $= 20$ জন।

প্রশ্নমালা 21

সমাধান কর :

1. $4x=20$

2. $8x=96$

3. $-7x=49$

4. $7x+3x=120$

5. $x+2=9$

6. $3x+6=15$

7. $8x-5=43$

8. $2x+1=-9$

9. $7x-8=27$

10. $x+2x+9x=36$

11. $5x-3x+4x=36$

12. $5(x+1)=20$

13. $6(x+3)=48$

14. $2(2x-4)=0$

15. $3(2x+5)=3(x+8)$

16. $4(4x-3)=3(2x+16)$

17. $3(2x+8)=x+24$

18. $5x+9=2(3+2x)+15$

19. $5(x-4)+2=3(x-2)+18$

20. কোন্ সংখ্যার 7 গুণের সহিত 11 যোগ করিলে যোগফল 81 হইবে ?

21. কোন্ সংখ্যা হইতে 102 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 327 হইবে ?

22. কোন্ সংখ্যার 2 গুণ হইতে 18 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 82 হইবে ?

23. কোন সংখ্যাকে 5 দ্বারা গুণ করিয়া, গুণফল হইতে 80 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 220 হয় ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

24. কোন্ সংখ্যার 10 গুণের সহিত 24 যোগ করিলে, যোগফল সংখ্যাটির 12 গুণ হইবে ?

25. 100 হইতে কোন সংখ্যার 6 গুণ বিয়োগ করিলে, বিয়োগফল উক্ত সংখ্যার 8 গুণ অপেক্ষা 2 বেশী হয় ; সংখ্যাটি কত ?

26. 25 কে এমন দুই ভাগে ভাগ কর যেন বৃহত্তর অংশের 2 গুণ, ক্ষুদ্রতর অংশের তিন গুণের সমান হয়।

27. দুইটি সংখ্যার যোগফল 114 এবং বিয়োগফল 26 হইলে সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

28. তিনটি ক্রমিক সংখ্যার যোগফল 246 হইলে, সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

29. পিতা-পুত্রের বর্তমান বয়সের সমষ্টি 88 বৎসর। পিতার বয়স যখন 32 বৎসর তখন তাহার পুত্রের জন্ম হইয়াছিল। বর্তমানে পিতা ও পুত্রের বয়স কত ?

30. পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি 70 বৎসর। পিতার বয়সের 3 গুণ পুত্রের বয়সের 7 গুণের সমান ; কাহার বয়স কত ?

31. 8 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 2 গুণ হইবে। বর্তমানে পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি 80 বৎসর হইলে, পিতার বর্তমান বয়স কত ?

32. প্রত্যেক বালিকাকে 40 পয়সা এবং প্রত্যেক বালককে 30 পয়সা হিসাবে দেওয়ায় 100 জন বালক-বালিকাকে দিতে মোট 36 টাকা খরচ হইল। বালক ও বালিকার সংখ্যা কত ?

33. একজন লোক 10 টাকার একটি নোট ভাঙ্গাইয়া 10 পয়সা ও 20 পয়সার মোট 78টি মুদ্রা পাইল। সে কয়টি 20 পয়সার মুদ্রা পাইল ?

34. A, B ও C-কে 288 টাকা এমনভাবে ভাগ করিয়া দাও যেন A যাহা পায় B তাহার দ্বিগুণ ও C তাহার 3 গুণ পায়। কে কত টাকা পাইবে ?

35. একটি আয়তক্ষেত্রাকার জমির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ অপেক্ষা 8 মিটার বেশী। জমির পরিসীমা 144 মিটার হইলে আয়তক্ষেত্রাকার জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

অসমীকরণ (Inequation)

সমতা চিহ্ন (=) দ্বারা সংযুক্ত দুইটি রাশি যদি এরূপ হয় যে উহাদের অন্তর্গত একটি অজ্ঞাত রাশির কোন নির্দিষ্ট মানের দ্বারা উহাদের সমতা সিদ্ধ হয়, তবে রাশি দুইটির এই প্রকার সমতাকে সমীকরণ বলা হয় ; কিন্তু রাশি দুইটির মধ্যে যদি সমতার সম্পর্ক না থাকে এবং রাশি দুইটির একটি যদি অপরটির অপেক্ষা বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর হয়, তাহা হইলে রাশি দুইটির এইরূপ সম্পর্ককে অসমীকরণ বলে।

অসমীকরণে ব্যবহৃত চিহ্ন-সমূহ : পূর্বে বলা হইয়াছে, একটি রাশি অপর একটি রাশি অপেক্ষা বৃহত্তর বুঝাইতে '$>$' চিহ্ন, ক্ষুদ্রতর বুঝাইতে '$<$' চিহ্ন, বৃহত্তর নহে বুঝাইতে '$\ngtr$' এবং ক্ষুদ্রতর নহে বুঝাইতে '$\nless$' চিহ্ন ব্যবহৃত হয়। রাশি দুইটি পরস্পর সমান অথবা একটি অপরটি অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে উহাদের সম্পর্ক '$\geqslant$' চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। আবার দুইটি রাশি পরস্পর সমান অথবা একটি অপরটি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে উহাদের সম্পর্ক '$\leqslant$' চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা যায়। সুতরাং '$\geqslant$' অথবা '$\leqslant$' চিহ্নদ্বারা প্রকাশিত রাশি দুইটির সম্পর্ককে 'সমীকরণ ও অসমীকরণের সংযোগ' বলা হয়।

অসমীকরণের পক্ষ : সমীকরণের যেইরূপ সমতা চিহ্নের উভয় পার্শ্বে অবস্থিত রাশি দুইটিকে সমীকরণের পক্ষ বলে, অসমীকরণেও সেইরূপ অসমচিহ্নের উভয় পার্শ্বে অবস্থিত রাশি দুইটিকে অসমীকরণের পক্ষ (Side) বলে। অসমচিহ্নের বাম পার্শ্বে অবস্থিত রাশিকে অসমীকরণের বামপক্ষ (Left side) এবং ডান পার্শ্বে অবস্থিত রাশিকে ডানপক্ষ বা দক্ষিণপক্ষ (Right side) বলে।

অসমীকরণের পক্ষান্তর করণ : (1) পূর্বে বলা হইয়াছে, সমীকরণের বাম পক্ষের রাশি ডান পক্ষে অথবা ডান পক্ষের রাশি বাম পক্ষে স্থান পরিবর্তন করিলে উহাদের চিহ্নের পরিবর্তন ঘটে। অর্থাৎ, '+' চিহ্নস্থানে '−' চিহ্ন এবং '−' চিহ্ন' স্থানে '+' চিহ্ন হয়। অসমীকরণেও ঐ একই নিয়ম প্রয়োজ্য। যথা :

সমীকরণের ক্ষেত্রে	অসমীকরণের ক্ষেত্রে
$2x-1=x+5$	$2x-1>x+5$
বা, $2x-x=5+1$	বা, $(2x-x)>(5+1)$

(2) সমীকরণের উভয় পক্ষকে সম্পূর্ণরূপে পক্ষান্তর করিলে উহাদের মানের পরিবর্তন হয় না। কিন্তু, অসমীকরণের ক্ষেত্রে অসমীকরণের উভয় পক্ষকে সম্পূর্ণরূপে পক্ষান্তর করিলে '>' চিহ্ন' স্থানে '<' চিহ্ন এবং '<' চিহ্নস্থানে '>' চিহ্ন ব্যবহার করিতে হয়। যথা :

সমীকরণের ক্ষেত্রে

(i) $a=b$, $\therefore$ $b=a$

সেইরূপ,

(ii) $4x+9=3x-2$

$\therefore$ $3x-2=4x+9$

অসমীকরণের ক্ষেত্রে

(i) $a>b$ $\therefore$ $b<a$

(ii) $a<b$ $\therefore$ $b>a$

সেইরূপ, (iii) $5x+4>x+9$

$\therefore$ $x+9<5x+4$

আবার, (iv) $2x+1<3x-4$

$\therefore$ $3x-4>2x+1$

অসমীকরণের বীজ :—অসমীকরণে যদি অজ্ঞাত রাশির এমন একটি মান বাহির করা যায় যাহাতে উভয় পক্ষে অসমীকরণের সম্পর্ক বজায় থাকে, তবে অজ্ঞাত রাশির ঐ মান মানকে অসমীকরণের বীজ বলে। যথা—

$$2x+3>9$$

বা, $2x>(9-3)$ বা, $2x>6$ বা, $x>3$

অতএব, দেখা যাইতেছে x-এর মান 3 অপেক্ষা বৃহত্তর যে-কোন একটি সংখ্যা $3\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{2}$, 4, 5···ইত্যাদি হইতে পারে এবং উহার ফলে অসমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

অসমীকরণের সমাধান করিতে হইলে নিম্নলিখিত নিয়মাবলীর উপর লক্ষ্য রাখিতে হইবে ঃ—

(1) অসমীকরণের উভয় পক্ষে সমান সমান রাশি যোগ করিলে মান বজায় থাকে এবং অসম চিহ্নের কোনরূপ পরিবর্তন হয় না।

(2) অসমীকরণের উভয় পক্ষ হইতে সমান সমান রাশি বিয়োগ করিলে মান বজায় থাকে এবং অসম চিহ্নের কোন পরিবর্তন হয় না।

(3) অসমীকরণের উভয়পক্ষকে সমান সমান ধনাত্মক রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে অসমীকরণের মান বজায় থাকে এবং অসমচিহ্নের কোন পরিবর্তন হয়।

(4) অসীমকরণের উভয় পক্ষকে সমান সমান ঋণাত্মক রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে অসম চিহ্নের পরিবর্তন হয়। (অর্থাৎ, '>' চিহ্ন স্থানে '<' এবং '<' চিহ্ন স্থানে '>')

(4) 'অসমীকরণ ও সমীকরণ' একত্রে '$\geqslant$' বা '$\leqslant$' চিহ্ন দ্বারা উল্লিখিত থাকিলে সমীকরণের জন্য অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয় করিতে হয় এবং অসীমকরণের জন্য অজ্ঞাত রাশির প্রকৃতি নির্ণয় করিতে হয়।

উদাহরণ 1. সমাধান কর ঃ $2x-1>5$

বা, $2x-1+1>5+1$ [উভয়পক্ষে 1 যোগ করিয়া]

বা, $2x>6$ বা, $x>3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x>3$.

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $5x+3<9x-17$

$5x+3<9x-17$

বা, $9x-17>5x+3$ [পক্ষান্তরের নিয়ম 2]

বা, $(9x-5x)>(3+17)$ বা, $4x>20$ বা, $x>5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x>5$.

দ্বিতীয় প্রণালী : $5x+3<9x-17$

বা $5x-9x<-17-3$ বা $-4x<-20$

বা, $x>\dfrac{-20}{-4}$ [অসমীকরণের নিয়মাবলী 4.]

বা. $x>5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x>5$.

উদাহরণ 3. সমাধান কর : $5x-4\geqslant 3x+12$

$5x-4\geqslant 3x+12$

বা, $5x-3x\geqslant 12+4$ বা, $2x\geqslant 16$ বা, $x\geqslant 8$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=8$, বা, $x>8$.

প্রশ্নমালা 22

সমাধান কর :

1. $3x-2>x+6$
2. $4x-9>3x+1$
3. $7x+4>5x+6$
4. $3x+7<x+17$
5. $12-4x<8$
6. $2(2x-7)>3(x-2)$
7. $3(2x-1)>4(3x-5)-1$
8. $8x+5(x-2)<(2x-1)-6$
9. $5(2x-3)>4(x-1)+7$
10. $2(x-3)+4(2x+1)>18$
11. $\frac{1}{2}(x+2)>\frac{1}{3}(x+4)$
12. $\frac{1}{4}(x-5)<\frac{1}{3}(x+9)$

31. $\frac{1}{5}(3x-3)+1>\frac{1}{2}(x+2)+8$

14 $\frac{1}{3}(4x-5)+1>\frac{1}{4}(5x-6)+3$

15. $\frac{2x-3}{3}>\frac{3x-4}{5}$ 16. $\frac{2x-6}{4}<\frac{2x-4}{5}$

17. $\frac{x}{4}-\frac{1}{6}>\frac{x}{2}-\frac{x}{3}$ 18. $\frac{2}{3}x+1\frac{2}{4}<\frac{5}{6}x-1\frac{1}{12}$

19. $10x-9\geqslant 7x-3$ 20. $\frac{3}{4}x-3\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{8}x$

নবম অধ্যায়

সরল সমীকরণে লেখ-চিত্র

[Graphs of Simple Equation]

লৈখিক প্রণালী (Graphical method) : যেমন যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ ও অন্যান্য প্রক্রিয়ার সাহায্য লইয়া পাটীগণিত ও বীজগণিত-এর নানাবিধ প্রশ্ন সহজে সমাধান করা যায়, সেইরূপ জ্যামিতিক উপায়ে সংখ্যাকে বিন্দু দ্বারাও প্রকাশ করা যায়। জ্যামিতিক উপায়ে সংখ্যাকে বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করার প্রণালীকে সংখ্যার লৈখিক পরিচয় (Graphical representation) বলা হয়। এই প্রণালীতে বীজগণিতের সূত্রগুলিকে সহজে বুঝিতে পারা যায়। ইহা ছাড়া বীজগণিতের সমীকরণেরও বীজ নির্ণয় করা যায়। লোক-গণনা, সংখ্যা-তালিকা সমন্বিত বহু তথ্য, তাপমাত্রা, বৎসরের বিভিন্ন সময়ের বৃষ্টিপাত প্রভৃতি বহু বিষয় লেখচিত্রের সাহায্যে অতি সহজে প্রকাশ করা হইয়া থাকে এবং বিষয়গুলি সম্বন্ধে আমাদের স্পষ্ট ধারণা জন্মে। লেখচিত্রের সাহায্যে প্রশ্ন সমাধানের প্রণালীকে বলা হয় লৈখিক প্রণালী (Graph method)।

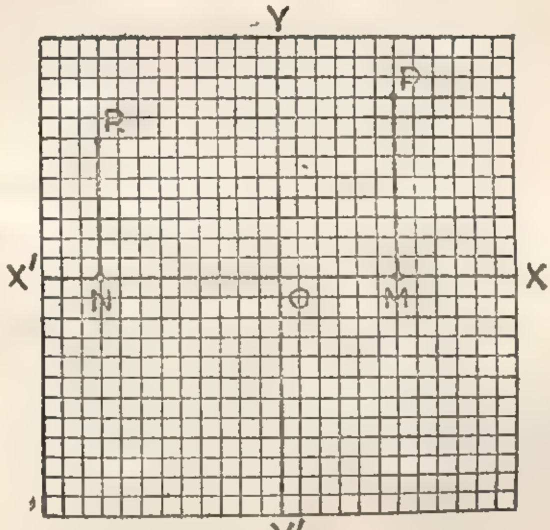
ছক কাগজ (Graph Paper) : লেখচিত্র অঙ্কন করার জন্য একপ্রকার কাগজ ব্যবহার করা হয়। এই কাগজের উপর সমদূরবর্তী কতকগুলি অনুভূমিক (Horizontal) এবং কতকগুলি উলম্ব (Perpendicular) সরলরেখা অঙ্কিত থাকে। ইহাতে কাগজখানি কতকগুলি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত হইয়া যায়। সাধারণতঃ একরেখা হইতে অপর রেখার ব্যবধান ·1 ইঞ্চি বা $\frac{1}{10}$ ইঞ্চি অর্থাৎ কাগজের মধ্যে যতগুলি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত হয়, তাহাদের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য ·1 ইঞ্চি বা $\frac{1}{10}$ ইঞ্চি। এইরূপ কাগজকে বলা হয় ছক কাগজ।

অক্ষ ও স্থানাঙ্ক (Axis, Co-ordinates) : পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত দুইটি নির্দিষ্ট অসীম সরলরেখার সাহায্যে একই সমতলে অবস্থিত বিন্দু সমূহের অবস্থান নির্ণয় করা হয়। এইরূপ সরলরেখা দুইটির প্রত্যেকটিকে অক্ষ (Axis) বলে।

মনে করি XOX′ এবং YOY′ নামক অসীম সরলরেখা দুইটি পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। তাহা হইলে XOX′ সরলরেখাকে X অক্ষ (x-axis) এবং YOY′ সরলরেখাকে Y অক্ষ (y-axis) এবং তাহাদের ছেদবিন্দু O-কে মূলবিন্দু (Point of Origin) বলা হয়। [চিত্র 1]

মনে করি, ছক কাগজের উপর অবস্থিত একটি বিন্দু হইল P। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে। P বিন্দু হইতে OX-এর উপর PM লম্ব টান। উহা OX-কে M বিন্দুতে ছেদ করিল। এস্থলে OM এবং PM-এর সংখ্যামানকেই P বিন্দুর স্থানাঙ্ক বলে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতি এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া গণিয়া দেখা গেল OM-এর মান হইল 6 এবং PM-এর মান হইল 9. অতএব P বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইল (6, 9)। এখানে OM রেখাটিকে P বিন্দুর ভুজ বা x-স্থানাঙ্ক (x-Co-ordinate) এবং PM-কে P বিন্দুর কোটি বা y-স্থানাঙ্ক (y-Co-ordinate) বলে।

আবার মনে করি, ছক কাগজের উপর অবস্থিত আর একটি বিন্দু R। R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে। R হইতে OX′ এর উপর RN লম্ব টানা হইল। এই লম্ব OX′-কে N বিন্দুতে ছেদ করিল। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া গণনা করিয়া দেখা গেল যে ON-এর মান হইল -9 এবং NR-এর মান হইল $+7$. এখানে ON এবং NR এর সংখ্যামানকে বলা হইবে R বিন্দুর স্থানাঙ্ক। [চিত্র—1]



চিত্র 1

কোন বিন্দুর ভুজ ও কোটি যথাক্রমে 6 এবং 9 হইলে বিন্দুটিকে সংক্ষেপে বলা হয় (6, 9) বিন্দু। আবার বিন্দুটির ভুজ a একক এবং কোটি b একক হইলে বিন্দুটিকে বলা হয় (a, b) বিন্দু। দেখা যাইতেছে যে, (5, 6) বিন্দু বলিলে বুঝায় ভুজ 5 একক এবং

কোটি 6 একক। আবার (−5, 3) বিন্দু বলিলে বুঝায়, ভুজ −5 একক এবং কোটি 3 একক।

স্থানাঙ্কের চিহ্নবিষয়ক নিয়ম (Convention of signs):

সাধারণতঃ XOX′ ডানদিক হইতে বামদিকে এবং YOY′ রেখাটিকে উপর হইতে নীচের দিকে টানা হয়। XOX′ এবং YOY′ পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিলে সমতলটি (*a*) XOY, (*b*) X′OY, (*c*) X′OY′ (*d*) XOY′ এই চারিটি অংশে বিভক্ত হয়। ইহাদের প্রত্যেক অংশকে পাদ (Quadrant) বলে। ইহার প্রথম পাদ হইল XOY. এই পাদে অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর ভুজ ও কোটি উভয়েই ধনাত্মক, কারণ এই পাদটির ভুজ OX, YOY′ অক্ষের ডানদিকে এবং কোটি OY, XOX′ এর উপর দিকে অবস্থিত। আবার দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর ভুজ ঋণাত্মক এবং কোটি ধনাত্মক; কারণ ইহার ভুজ OX′, YOY′ অক্ষের বামদিকে এবং কোটি OY, XOX′-এর উপর দিকে অবস্থিত।

তৃতীয় পাদ X′OY′-এ অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর ভুজ এবং কোটি উভয়ই ঋণাত্মক, কারণ এই পাদের ভুজ OX′, YOY′-এর বামপার্শ্বে এবং কোটি OY′, XOX′-এর নীচের দিকে অবস্থিত। আবার চতুর্থ পাদ XOY′-এর ভুজ ধনাত্মক এবং কোটি ঋণাত্মক কারণ ভুজ OX, YOY′-এর ডানদিকে এবং কোটি OY′, XOX′-এর নীচের দিকে অবস্থিত।

পাদ	ভুজ	কোটি
প্রথম	+	+
দ্বিতীয়	−	+
তৃতীয়	−	−
চতুর্থ	+	−

বিন্দু অঙ্কন (Plotting of Points) ঃ

(ক) বিন্দু অঙ্কন করিতে হইলে প্রথমে x ও y অক্ষ ছক কাগজে অঙ্কন করিয়া মূল বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করিতে হয়।

(খ) বিন্দু স্থাপনের সুবিধার জন্য ভুজ ও কোটির দৈর্ঘ্যের একক ঠিক করিয়া লইতে হয় এবং সাধারণতঃ ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরা হয়। অবশ্য একক ধরার কোন বাঁধাধরা নিয়ম নাই।

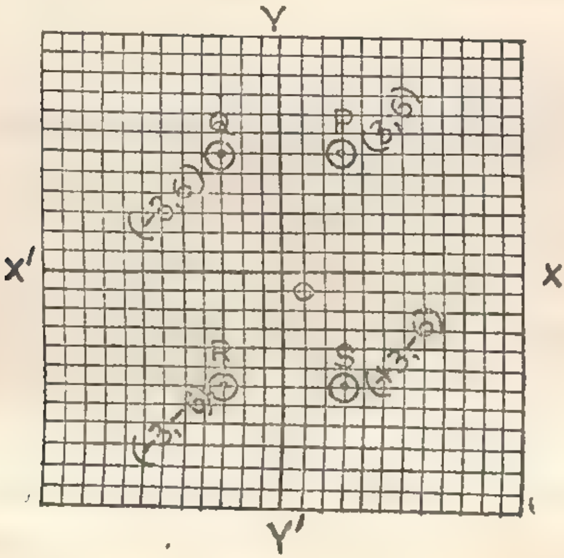
(গ) বিন্দুটি সাধারণতঃ '·' বা '×' দ্বারা নির্দেশ করিতে হয় এবং বিন্দু অঙ্কন করিয়া উহার পার্শ্বে বন্ধনীর মধ্যে স্থানাঙ্ক লিখিয়া দিতে হয়।

উদাহরণ 1. (*a*) (3, 6), (*b*) (– 3, 6), (*c*) (– 3, – 6), (*d*) (4, – 6) বিন্দুগুলির ছক কাগজে স্থাপন কর।

(*a*) নির্ণেয় বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক = 3 এবং y স্থানাঙ্ক = 6 এবং উভয়ে ধনাত্মক। অতএব ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক-বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া OX অক্ষে, মূলবিন্দু O হইতে ডানদিকে 3 একক যাও। সেখান হইতে বাঁকিয়া উপরের দিকে 6 একক দূরে গিয়া থাম এবং সেখানে বিন্দু স্থাপন কর। ঐ বিন্দুর নাম দাও P. অতএব ঐ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 6). [চিত্র—2]।

(*b*) ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একবাহুর দৈর্ঘকে একক ধরিয়া মূলবিন্দু O হইতে OX′ অক্ষে বামদিকে 3 একক দূরে গিয়া থাম। সেখান হইতে বাঁকিয়া উপরদিকে 6 একক দূরে গিয়া থাম এবং সেখানে বিন্দু স্থাপন কর। ঐ বিন্দুর নাম দাও Q. ঐ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (– 3, 6) [চিত্র-2]।

(*c*) ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রে এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া মূলবিন্দু O হইতে বামদিকে OX′-এর অভিমুখে 3 একক দূরে গিয়া থাম এইং সেখান হইতে বাঁকিয়া নীচের দিকে 6 একক দূরে গিয়া থাম এবং R বিন্দু স্থাপন কর। ঐ R বিন্দুর স্থানাঙ্ক (−3, −6). [চিত্র 2]।



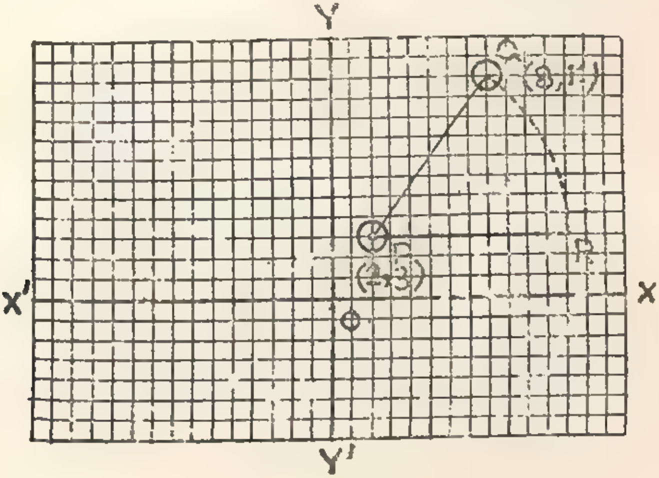
চিত্র নং—2

(*d*) ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া মূলবিন্দু O হইতে ডানদিকে 3 একক দূরে গিয়া থাম এবং সেখান হইতে নীচের দিকে বাঁকিয়া 6 একক দূরে গিয়া থাম। ঐ বিন্দুর নাম দাও S. ঐ S বিন্দুর স্থানাঙ্ক (+3, −6) [চিত্র 2]।

উদাহরণ 2. ছক কাগজে P (2, 3) এবং Q (8, 11)—এই দুইটি বিন্দু স্থাপন কর এবং উহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর।

পূর্ব প্রণালী অনুসারে ছক কাগজে P বিন্দু ও Q বিন্দু স্থাপন কর।

PQ যোগ কর। এখন PQ সরলরেখা হইল P এবং Q-এর নির্ণেয় দূরত্ব। PQ-এর দূরত্ব নির্ণয় করিবার জন্য Pকে কেন্দ্র করিয়া PQ-এর



চিত্র—3

সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক। উহা যেন P বিন্দুগামী X অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখাকে R বিন্দুতে ছেদ করিল।

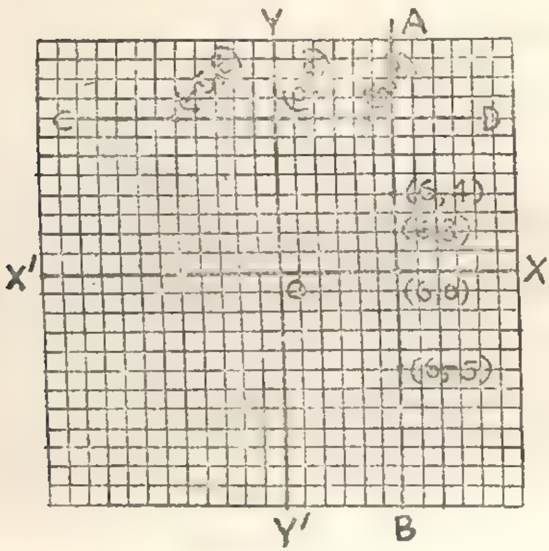
$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $PQ = PR = 10$ একক। [চিত্র 3]

সরল সমীকরণের লেখ-চিত্র

বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকিলে ছক কাগজের সাহায্যে উহার অবস্থান সহজেই নির্ণয় করা যায়। x এবং y এর সম্বন্ধ না থাকিলে x এবং y বিন্দু দ্বারা ছক কাগজের যে-কোন বিন্দুতে সূচিত করা চলে। কিন্তু x এবং y এর মধ্যে যদি কোন সম্বন্ধ দেওয়া থাকে তাহা হইলে বিন্দুটিকে নির্দিষ্ট স্থানে স্থাপন করিতে হয়, কারণ x এর কোন একটি মান ধরিলে y এরও একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ 3. (a) $x=6$ এর লেখ অঙ্কিত কর।

(b) $y=8$ „ „ „ „



চিত্র—4

(a) XOX′ কে x-অক্ষ এবং YOY′ কে y-অক্ষ ধরা গেল। উহারা পরস্পর O বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে।

ছক কাগজে ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রকে একবাহুর দৈর্ঘ্য একক ধরা গেল।

যেহেতু $x=6$, অতএব y এর মান যাহাই হউক না কেন, x এর মান সর্বত্র সমান হইবে।

অতএব (6, 0), (6, 3), (6, 4), (6, −5) বিন্দুগুলি যুক্ত করিলে দেখা যাইবে যে, লেখটি y অক্ষের সমান্তরাল AB একটি সরলরেখা এবং উহা y অক্ষ হইতে সর্বদা 6 একক দূরে অবস্থিত। [চিত্র—4]

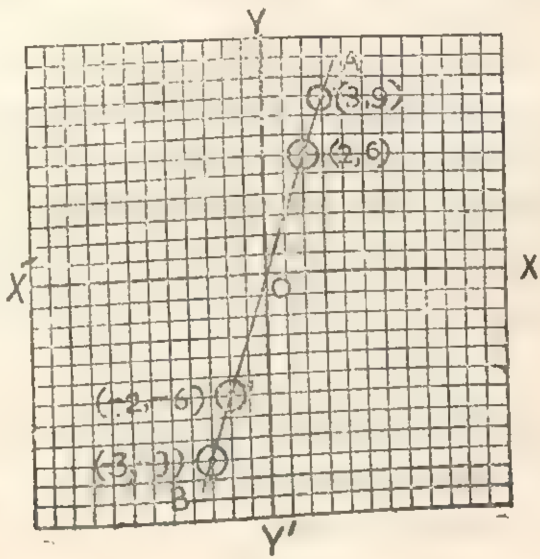
(*b*) আবার $y=8$, অতএব x এর মান যাহাই হউক না কেন, y এর মান সর্বত্র 8। সুতরাং (0, 8), (5, 8), (−5, 8), (6, 8) বিন্দুগুলি যুক্ত করিলে দেখা যাইবে যে লেখ CD হইবে x-অক্ষের 8 একক দূরে অবস্থিত সমান্তরাল একটি সরলরেখা। [চিত্র—4]

উদাহরণ 4. $y=3x$ লেখ অঙ্কিত কর।

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে দেখা যাইতেছে যে—

যখন	x	2	−2	3	−3
তখন	y	6	−6	9	−9

(2, 6), (−2, −6), (3, 9), (−3, −9) বিন্দুগুলি যোগ করিয়া



চিত্র—5

AB একটি অসীম সরলরেখা পাওয়া গেল। AB হইল $y=3x$ এর লেখ। [চিত্র—5]

প্রশ্নমালা 23

1. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি কোন্ পাদে অবস্থিত, বল :

$(5, 3)$; $(-5, 3)$; $(-5, 7)$; $(6, -6)$;
$(-7, -7)$; $(9, 6)$; $(-9, -6)$; $(18, -7)$.

2. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন কর :

$(8, 7)$; $(-7, 3)$; $(3, -7)$; $(8, 11)$; $(-11, 10)$; $(0, -7)$; $(7, -5)$.

3. নিম্নলিখিত বিন্দুদ্বয় স্থাপন করিয়া উহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর :

(*a*) $(3, 4)$ এবং $(6, 8)$; (*b*) $(-2, 7)$ এবং $(-10, 1)$

4. PQ এবং RS সরল রেখা অঙ্কিত করিয়া উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :

$P(-6, 4)$, $Q(8, -5)$, $R(4, 5)$, $S(-7, -6)$

5. $(2, 7)$, $(-2, -1)$, $(4, 11)$, $(-1, 1)$—এই চারিটি বিন্দু ছক কাগজে স্থাপন কর। উহাদের যে কোনও দুইটি বিন্দু যোগ করিয়া দেখাও যে অবশিষ্ট দুইটি বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত।

6.

x	2	-2	4	-3
y	5	-11	13	-15

উপরে চারিটি বিন্দুর ভুজ এবং কোটি তালিকাবদ্ধ করা আছে। বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করিরা যোগ কর, দেখাও যে চারিটি বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত।

7. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লেখ অঙ্কন কর :

(i) $x=4$ (ii) $y=6$ (iii) $x=-5$
(iv) $y=-7$ (v) $y=4x$ (vi) $y=-5x$,
(vii) $y=2x+3$ (viii) $y=2x-4$

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1

1. $x+6$.	2. $5+a$.	3. $a+b$	4. $12-x$.
5. $p-4$.	6. $m-n$.	7. $12p$.	8. ab.
9. $\frac{20}{a}$.	10. $\frac{x}{3}$.	11. $\frac{x}{y}$.	

12. $(11+x)$ বৎসর।	13. $(18-y)$ বৎসর।
14. $(15-y)$ টাকা।	15. $(x-12y)$ টাকা।
16. $(12x-5000)$ টাকা।	17. $15x$ পয়সা।
18. ab টাকা।	19. pq বর্গমিটার।
20. $\frac{p}{a}$ মিটার।	21. $\frac{x}{20}$ টাকা।
22. $(500+x)$ পয়সা।	23. $(1000m+520)$ গ্রাম।
24. $\frac{y}{x}$ ঘণ্টা। 25. $mn+p$.	26. $(xy+16)$ টাকা।
27. $(15x+16y)$ টাকা।	28. $(x+y+16)$ কিমি.।

প্রশ্নমালা 2

1. 12.	2. 10.	3. 6.	4. $\frac{5}{6}$
5. 34.	6. 0.	7. 2.	8. 8.
9. 12.	10. 3.	11. 14.	12. 26.
13. 32.	14. 40.	15. 74.	16. 34.
17. $\frac{3}{8}$.	18. $\frac{3}{8}$.	19. 1.	20. $\frac{1}{2}$.
21. $1\frac{2}{3}$.	22. 1.	23. 2.	24. 3.
25. 22.	26. 28.	27. 1760.	28. 106.
29. 32.	30. $1\frac{5}{12}$.	31. 13.	32. $3\frac{7}{18}$.
33. 4.	34. 5.	35. 5.	

প্রশ্নমালা 3

1. $+15, -40$. 2. $+40, -50$. 3. $+100, -40$
4. $+15, -30$. 5. $-30, +40$. 6. $+2, -2$.
7. $-4, +4$. 8. $+70, -40$. 9. $+15, -10$
10. -30. 11. $0-2$. 12. -10.
13. -300. 14. -800. 15. $+20$.
16. -4. 17. $-3, -1$. 18. (i) $>$ (ii) $<$ (iii) $<$ (iv) $<$ (v) $>$ (vi) $<$ (vii) $>$ (viii) $>$ (ix) $>$

19. (i) $<$ (ii) $>$ (iii) $<$ (iv) $>$ (v) $>$ (vi) $<$ (vii) $<$ (viii) $>$ (ix) $<$.

20. $-40, -13, -7, 0, +1, +7$ এবং $+9$
$-30, -25, -2, -1, 0, +1, +5$ এবং $+29$

প্রশ্নমালা 4

1. (i) $+21$. (ii) $+54$. (iii) $+13$.
(iv) -149. (v) -232. (vi) -387.
2. (i) $+18$. (ii) -19. (iii) -209.
(iv) -210. (v) -193. (vi) -1000.
3. (i) $+161$. (ii) -646. (iii) -1530.
(iv) $+231$. (v) -2412. (vi) $+1650$.
4. (i) -23. (ii) -13. (iii) -18.
(iv) $+23$. (v) -16. (vi) -12.
5. (i) -5. (ii) $+1$. (iii) -10.
(iv) -4. (v) -2. (vi) $+13$.
6. $+11$ এবং 0. 7. $+10$. 8. -114.

প্রশ্নমালা 5

1. $15a$.	2. $6ax$.	3. $-11a^2x^2$.	4. $-26ab$.
5. $10x$.	6. $11{\cdot}7xy$.	7. $-0{\cdot}6ab$.	8. $0{\cdot}322\ m^2$.
9. $1\frac{1}{4}x^2y^2$.	10. $2a^2bc$.	11. $7x$.	12. $2ax$.
13. $12x^2$.	14. $25p^3$.	15. $12m^2n^2$.	16. $19x$.
17. $5ab$.	18. $-4abc$.	19. $6abc$.	20. $-18{\cdot}8x^2y^2$.
21. $10a^3b^3$.	22. $-10x$.	23. $4{\cdot}46ab$.	24. $-16bx$.
25. $\frac{1}{2}pm$.	26. x^2y.	27. $20{\cdot}76p$.	28. $5ab$.
29. $28pq$.	30. -17.	31. 270.	32. -116.

33. (a) -7. (b) 7. (c) 17.

প্রশ্নমালা 6

1. $5x+7y$. 2. $8x+5y$. 3. $-a^2x+3b^2y$.

4. $-11ab-2bc+3ca$.	5. $15m^2n^2+2p^2q^2+5x^2y^2$.
6. $3a+6b$.	7. $10bc+4cd+3ab$.
8. $8x^2+8y^2+8z^2$.	9. $2y^3-z^3$.
10. $7m^2n-p^2q$.	11. $a-b+c$.
12. $a+2b-c$.	13. $-a+6b$.
14. $7x^2-x-5y+7z$.	15. $x^2+8y^2+2z^2$.
16. $2x-y$.	17. $-8m+8n$.
18. $-7p-6q$.	19. $9x^2+12y^2-10z^2$.
20. $-5a+ab-4bc$.	21. $-a-b$.
22. $7a-10b-c$.	23. -41.
24. -16.	25. $6ab-9bc+8ca$.

প্রশ্নমালা 7

1. a^5. 2. $2a^2$. 3. $12a^5$.
4. $-12xy$. 5. $12xy$. 6. $-24a^2bx$.
7. $10x^4y^3$. 8. $18x^5y^5$. 9. $-96x^7y^7z^4$.
10. $192m^8n^{12}p^9$. 11. $5a^6x^{10}y^4z^8$. 12. $-80mn^4p^5q^5$.
13. $-10ax^2yz^{12}$. 14. $15a^4bx^4p^8$. 15. $-98a^5b^5c^5$.
16. $-72p^5q^8x^7y^4$. 17. $56a^8b^{11}cx$.
18. $-70a^2b^2x^2y^2$. 19. $-60a^{16}b^{19}c^{21}$.
20. $72a^{10}b^{11}c^{11}d^{14}$. 21. $-880x^{10}y^{10}z^{10}$.
22. $-60a^3b^8c^2$. 23. $192a^6b^3d^4$.
24. $-120a^{11}b^{18}c^{14}$. 25. $20x^{14}$.
26. $648x^{10}y^{16}$. 27. $18000x^{22}y^4$.

প্রশ্নমালা 8

1. $10x+45$. 2. $18x^2-48x$.
3. $-56a^2b+48ab^2$. 4. $12ax+18bx$.
5. $-10a^3b+15ab^3$ 6. $-12a^2x^4y-48a^2x^3y^2$.
7. $2a^2b^2+4ab^3+6ab^2c$. 8. $-5x^4y^2+5x^2y^4-15x^2y^2z^2$.
9. $-22a^4b^3c^8-33a^2b^3c^9+44a^6b^6c^8$.
10. $-36x^6y^8z^3+42x^{13}y^{12}z^3+30x^{12}y^5z^{11}$.
11. $30x^2y-36x^2y^3$. 12. $48x^4y^4-64x^3y^{10}$.
13. $-64a^3b^6c+40ab^6c^4$. 14. $54a^6b^5c^2-30a^5b^3c^2d^2$.
15. $24abx+30bcx$.
16. $-45x^3y^3m+20x^5y^4n$.
17. $-16x^6-24x^7-32x^8$.

18. $35x^6y^4-30x^{13}y^{15}+15x^4y^4.$

19. $27x^6y^6-36x^8y^8-45x^9y^9.$

20. $-14a^{13}b^{16}+21a^8b^{10}-28a^{11}b^{12}.$

21. $0.$ 22. $33x^3-50x^2.$ 23. $41x^4-42x^3.$

24. $a^2b^4-b^2c^4-c^2a^4+2a^2b^2c^2.$

25. $4x^3y+15x^2y^2-8x^2yz-15xy^2z+12xy^3$
$-16xyz^2-12y^2z^2+8yz^3.$

প্রশ্নমালা 9

1. $2a.$ 2. $-2b.$ 3. $-5a^2b^4.$

4. $3b^8c^2.$ 5. $4pq^2.$ 6. $-5y^5z^4.$

7. $5a^5b^{12}.$ 8. $-2np^6.$

9. $-4a^8b^2c.$ 10. $-3a^{46}b^{29}c^{25}.$

11. $3x^5y^4z^2$ 12. $3p^3z^4.$

13. $-20x^{10}y^2z^3$ 14. $-11a^{79}b^{59}.$

15. $16x^{97}y^{21}z^7.$

প্রশ্নমালা 10

1. $x+2.$ 2. $2x^2-3x^2y^3.$

3. $3x+4x^4y^2.$ 4. $a^4b^4-a^6b.$

5. $-2x^3y^5+3x^4y^6.$ 6. $ab-2a^2b^3-3a^5b^2.$

7. $-x^2y^4-3x^4y^2+4x^6y^4.$

8. $2a^2y^7+3a^3b^{10}+4a^4z^7.$

9. $-2c^2+3a^2b^2c-4a^6b^4c^6.$

10. $-yz^6-3x^3yz^8+5x^7y^6z.$

প্রশ্নমালা 11

1. $2b-2c.$
2. $2a-c.$
3. $2bc-ca-ab.$
4. $b+c-bc.$
5. $2c.$
6. $-6a+4b+4c.$
7. $-8x-4y+3z.$
8. $2a-3y.$
9. $2b.$
10. $6y-7z.$
11. $2x-2y.$
12. $3x+4y-4z.$
13. $-8m-2n.$
14. $3a+b+12c.$
15. $9a-6b-6c.$
16. $2y-z.$
17. $-3x-y+6z.$
18. $-2x-5y+7z$
19. $6x-5y.$
20. $4a+b+4c.$
21. $a-(-b-c)+(-d-e-f).$
22. $x+y-\{z-(-p-q-r)\}.$

প্রশ্নমালা 12

1. $10a^3-x^2+2x+3$
2. $12a-5b-14c+6d.$
3. $17p+16q-3r+6s.$
4. $10x^2+14y^2-7a^2+8b^2.$
5. $2a+\frac{3}{8}c-\frac{4}{9}d.$
6. $4x^3-4x^2y+3xy^2+8.$
7. $8ab-5bc+4ca-3cd.$
8. $7x^5-16x^4+9x^3+4x^2+6x-5.$
9. $17x^4-16x^3y-6x^2y^2-2xy^3-y^4.$
10. 24.
11. 12.
12. 60.
13. $-16.$
14. $-ab+bc+ad+ac.$

প্রশ্নমালা 13

1. $2a-5b+11c-17d.$
2. $-2a^3-13a^2b-5a^2c+9.$
3. $4ax-18ay-15az+23ab.$
4. $-a^2b-4b^2c+3c^2d+d^2f$
5. $-11x^2+2x-4.$
6. $1{\cdot}4x^3-4{\cdot}8x^2+4{\cdot}6x+1.$
7. $-b^2+c^2-d^2.$
8. $7abc+10bcd-16acd+6ab.$
9. $4a+8b-4c.$
10. $-y-3z-4.$
11. $3x+4y+5z+9.$
12. $3m^2+5n^2-10y^2+6z^2.$
13. $3m^2n+mn^2$
14. $-2a^2-3b^2+3c^2-3.$
15. $3a+b-c-5.$

প্রশ্নমালা 14

1. $x^3+y^3.$
2. $a^3-b^3.$
3. $9x^3-18x^2+20x-16.$
4. $-18x^3+33x^2y-17xy^2+2y^3.$
5. $x^4-4x^3+6x^2-4x+1.$
6. $5a^2b-7a^2c-6abc-5abd+7acd+6bcd+a^2d-ad^2$
7. $2x^4+3x^3+3x^2-x-1.$
8. $27p^4-18p^3q-24p^2q+3p^2q^2+8pq^2+9p-3q.$
9. $-4b^2-4bc+3c^2+20ab-10ac+8c-4c.$
10. $a^4b^3-3a^2b^4c-3c^4d^3+3a^2b^2c^2d-a^2b^2$ $-a^2bc^2d^2+3b^2c^3d^2+c^2d^2.$
11. $8x^5-8x^4+4x^3-3x^2-3x+2.$
12. $12x^6-12x^5y+2x^4y^2-2x^2y^4+3xy^5-y^6.$

প্রশ্নমালা 15

1. $2a^3b^5-4a^2b^2+6ab^3$.
2. $a^4-2a^3b^6+3a^7b^7$.
3. $-n^2+2m^2n+3m^2n^2$
4. $2m^5n^3-2m^4n^2-4mn^6$.
5. $2y^4+3xy^5-5x^5$
6. $xy+2x^2y^2-3x^3y^3-4x^4y^4$.
7. $2y^4-3x^5y^3-x^6y^4+4xy^2$.
8. $-2b^2c+6ac^2-4b^2c^3+8a^8bc^2$.
9. $3a^8b^3-5a^6b^7x+6a^{11}b^2x^5-8a^6b^{12}x^{11}$.
10. $-a^2b^2x^2+ab^2xy^6+a^{12}b^{13}x^3y^3$.
11. $-4acz+3a^2c^2z^2-6a^3c^3z^3-8a^4c^4z^4$.
12. $-4n^2+2m^3n^4-$ [illegible] $m^{11}+10m^2n^9$.

প্রশ্নমালা 16

1. 25.
2. 100.
3. $4x^2+8x+4$.
4. $4y^4+12y^2+9$.
5. $x^4y^2+2x^3y^3+x^2y^4$.
6. $16x^4y^4+40x^3y^5+25x^2y^6$.
7. $4a^6+28a^4b^2+49a^2b^4$.
8. $a^8b^2+2a^4bxp^3+x^2p^6$.
9. $p^4q^2+2p^3q^4+p^2q^6$.
10. $36a^2x^2+24abxyz+4b^2y^2z^2$.
11. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{4b^2}$.
12. $\frac{1}{4x^2}+\frac{3}{4xy}+\frac{9}{16y^2}$.
13. $a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2$.
14. $16x^4+25y^4+z^4+40x^2y^2+8x^2z^2+10y^2z^2$.
15. $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz$.
16. $a^4b^2+b^4c^2+c^4d^2+2a^2b^3c+2a^2bc^2d+2b^2c^3d$.
17. $x^4+y^4+m^4+n^4+2x^2y^2+2x^2m^2+2x^2n^2$
$+2y^2m^2+2y^2n^2+2m^2n^2$.

18. $a^2+4b^2+9c^2+16+4ab+6ac+8a+12bc+16b+24c$.

19. $4x^4+m^4+4y^4+p^4+4x^2m^2+8x^2y^2+4x^2p^2+4m^2y^2$
$+2m^2p^2+4y^2p^2$.

20. $a^4b^2+b^4c^2+c^4d^2+d^4e^2+2a^2b^3c+2a^2bc^2d+2a^2bd^2e$
$+2b^2c^3d+2b^2cd^2e+2c^2d^3e$.

21. $(a+2)^2$. 22. $(2x+3y)^2$. 23. $(5a+1)^2$.
24. $(4+x)^2$. 25. $(7ab+2cd)^2$. 26. $(9p+4q)^2$.
27. $(8m^2+2n^2)^2$. 28. 289. 29. 1.
30. 360000. 31. 16. 32. 100.
33. 13. 34. 41. 35. 9.
36. 25. 37. $4m^2$ 38. $4x^2$.
39. $x^2+2bx+b^2$. 40. $4a^2$ 41. $p^2+2pq+q^2$.
42. $4y^2z^2$.

প্রশ্নমালা 17

1. 9216. 2. 2304. 3. x^2-2x+1.
4. $4x^2-16x+16$. 5. $9m^2-12mn+4n^2$.
6. $9x^4-6x^2+y^4$. 7. $p^4q^6-2p^2q^4+q^2$.
8. $x^2p^6-2p^3q^3xy+y^2q^6$.
9. $a^2b^2c^2-2abcpq+p^2q^2$. 10. $a^4-2a^2pq^3+p^2q^6$.
11. $x^2-2+\frac{1}{x^2}$. 12 $\frac{25}{36a^2}-\frac{1}{ab}+\frac{9}{25b^2}$.
13. $x^2+2xy+y^2$. 14. $9a^2+24ab+16b^2$.
15. $x^2+4y^2+9z^2-4xy-6xz+12yz$.
16. $4x^2+4y^2+z^2-8xy-4xz+4yz$.
17. $a^4+4b^4+9c^4-4a^2b^2+6a^2c^2+12b^2c^2$.
18. $4p^2+25q^2+36r^2+20pq-24pr-60qr$.

19. $a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2ac+2ad-2bc+2bd-2cd.$

20. $m^4+n^4+c^4+d^4-2m^2n^2-2m^2c^2+2m^2d^2+2n^2c^2$
$-2n^2d^2-2c^2d^2.$

21. $(3x-1)^2.$ 22. $(x^2-y^2)^2.$ 23. $(5pq-3)^2.$

24. $(6ab-2c^2)^2.$ 25. $(2x-\frac{1}{2})^2.$ 26. 100.

27. 0·81. 28. 289. 29. 121.

30. 4. 31. $4a^2.$ 32. $9x^2.$

33. $49y^6.$ 34. $x^4y^4.$

প্রশ্নমালা 18

1. 1. 2. 39. 3. 34. 4. $m^2-2.$

5. 77. 6. 160. 7. 146. 8. 27.

9. 5. 10. 8. 11. 6. 12. 4.

13. 73. 14. 400. 15. 6. 8. 16. 8.

17. 40. 19. 26. 20. 37.

প্রশ্নমালা 19

1. $a^2-4.$ 2. $a^2-9b^2.$ 3. $9a^2-16.$

4. $a^2b^2-c^2d^2.$ 5. $x^4y^2-a^2b^2c^2.$ 6. $m^4-n^4.$

7. $p^4q^2-p^2q^4.$ 8. $a^4b^2c^2-x^2y^2z^2.$

9. $4m^4p^2q^2-9m^2n^2.$ 10. $a^4-1.$

11. $x^8-y^8.$ 12. $16a^4-81b^4.$

13. $x^2+y^2-z^2+2xy.$ 14. $x^2+y^2-z^2-2xy.$

15. $x^4+y^4+x^2y^2.$

16. $a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2+2abc^2.$

17. $a^4+b^4-2a^2b^2.$ 18. $x^8y^8+x^4y^4+1.$

19. 89951. 20. 249744. 21. 359375.

22. 1640. 23. 88695. 24. 210.

25. 12414.

প্রশ্নমালা 20

1. $(5a+1)(5a+1)$.
2. $(a+8b)(a+8b)$.
3. $(a^2-6b^2)(a^2-6b^2)$.
4. $(ab-cd)(ab-cd)$.
5. $(x+10y)(x+10y)$.
6. $(x^3-3y)(x^3-3y)$.
7. $(3x^2-5y^2)(3x^2-5y^2)$
8. $(1+5y^2)(1+5y^2)$.
9. $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)$.
10. $\left(3p-\frac{1}{3p}\right)\left(3p-\frac{1}{3p}\right)$.
11. $(9a+c)(a+5c)$.
12. $(13x^2-7y^2)(3x^2-3y^2)$.
13. $(4a-3c-6c)(5b+4c-2a)$.
14. $(2x+y-10z)(y+4z)$.
15. $(3x+a+b)(3x-a-b)$.
16. $(4ab+3a+4b)(4ab-3a-4b)$.
17. $(5x^2+p^2+q^2)(5x^2-p^2-q^2)$.
18. $(7a^2b^2+m^3+n^3)(7a^2b^2-m^3-n^3)$.
19. $(a+b+3c)(a+b-3c)$.
20. $(a^2+b^2+4bc)(a^2+b^2-4bc)$.
21. $(x+p+8abc)(x+p-8abc)$.
22. $(a^2+p^2+9x^2)(a^2+p^2-9x^2)$.
23. $(a+2b)(a-2b)$.
24. $(a^2+4c^2)(a+2c)(a-2c)$.
25. $(2x+3z)(2x-3z)$.
26. $(4x^2+9y^2)(2x+3y)(2x-3y)$.
27. $(a^2x^2+7b)(a^2x^2-7b)$.
28. $(11+3x)(11-3x)$.
29. $(2xy+7bc)(2xy-7bc)$.
30. $(8pq+3x^2y^2)(8pq-3x^2y^2)$.
31. $(x^2+1)(x+1)(x-1)$.
32. $(a^2+4)(a+2)(a-2)$.
33. $(a^2x^2+8b^2)(a^2x^2-8b^2)$.
34. $(a^2+2ax+2x^2)(a^2-2ax+2x^2)$.

35. $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$.
36. $(2x^2+6x+9)(2x^2-6x+9)$.
37. $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.
38. $(3x^2+x-4)(3x^2-x-4)$ বা $(3x^2+7x+4)(3x^2-7x+4)$ বা $(3x+4)(3x-4)(x+1)(x-1)$.
39. $(x+y+4a)(x+y-4a)$.
40. $(x-2y+3z)(x-2y-3z)$.
41. $(a-c)(a+2b+c)$. 42. $(x-y)(x+y-2)$.
43. $(ab+cd+ac-bd)(ab+cd-ac+bd)$.
44. $(a-b+c)(a-b-c)$.
45. $(25+10a+2a^2)(25-10a+2a^2)$.

প্রশ্নমালা 21

1. 5. 2. 12. 3. -7. 4. 12.
5. 7. 6. 3. 7. 6. 8. -5.
9. 5. 10. 3. 11. 6. 12. 3.
13. 5. 14. 2. 15. 3. 16. 6.
17. 0. 18. 12. 19. 15. 20. 10.
21. 429. 22. 50. 23. 60. 24. 12.
25. 7. 26. 15, 10. 27. 70, 44.
28. 81, 82, 83. 29. 60, 28. 30. 49, 21.
31. 56. 32. 40, 60. 33. 22.
34. 48, 96, 144. 35 40 মি. 32 মি.

প্রশ্নমালা 22

1. $x>4$, 2. $x>10$. 3. $x>1$. 4. $x<5$.
5. $x>1$. 6. $x>8$. 7. $x<3$. 8. $x>1$.
9. $x>3$. 10. $x>2$. 11. $x>2$. 12. $x<19$.
13. $x>86$. 14. $x>26$. 15. $x>3$. 16. $x<7$.
17. $x>2$. 18. $x>17$.
19. $x>2$, বা $x=2$. 20. $x<4$, বা $x=4$.

জ্যামিতি

প্রথম ভাগ

সাঙ্কেতিক চিহ্নসমূহ

$=$ সমান, $\cong$ সর্বসম

$\therefore$ অতএব, $\because$ যেহেতু

$\parallel$ সমান্তরাল (যথা, AB $\parallel$ CD অর্থাৎ AB ও CD সমান্তরাল)

$\angle$ কোণ (যথা, $\angle$ABC অর্থাৎ ABC কোণ)

$>$ বৃহত্তর (যথা, $a>b$ অর্থাৎ b অপেক্ষা a বৃহত্তর)

$<$ ক্ষুদ্রতর (যথা, $a<b$ অর্থাৎ b অপেক্ষা a ক্ষুদ্রতর)

$\triangle$ ত্রিভুজ (যথা, $\triangle$ABC অর্থাৎ ABC ত্রিভুজ)

$\overleftrightarrow{AB}$ (সরলরেখা AB, যাহাকে উভয়দিকে যতদূর ইচ্ছা বর্ধিত করা যাইতে পারে)

$\overrightarrow{AB}$ সরলরেখা AB, যাহাকে A অভিমুখে বর্ধিত না করিয়া B অভিমুখে যতদূর ইচ্ছা বর্ধিত করা যাইতে পারে)

$\overline{AB}$ (AB রেখাংশ, ইহার একপ্রান্তে A এবং অপর প্রান্তে B)

প্রথম অধ্যায়

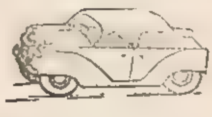
প্রথম পরিচ্ছেদ

চলন ও ঘূর্ণন সম্বন্ধে ধারণা—উহাদের ধর্ম

[Simple ideas of translation and rotation —their properties]

চলন ও ঘূর্ণন :

তোমরা প্রতিনিয়তই নানা আকার ও আয়তনের বস্তু তোমাদের চারিদিকে দেখিতে পাইতেছ। এই বস্তুগুলির মধ্যে কতকগুলি স্থির এবং কতকগুলি গতিশীল। ঘরবাড়ী, টেবিল, চেয়ার, বইপত্র, থালাবাসন প্রভৃতি স্বভাবতঃই স্থির; কিন্তু ট্রাম, বাস, নৌকা, সাইকেল, গরুর গাড়ী, এরোপ্লেন, ঘড়ির কাঁটা ইত্যাদিকে তোমরা গতিশীল অবস্থায় দেখিতে পাও। সময় জানিবার জন্য যখনই তুমি ঘড়ির দিকে তাকাও, তখনই দেখিতে পাও ঘড়ির কাঁটা স্থান পরিবর্তন করিতেছে। তোমার বাড়ীর সম্মুখ দিয়া যে রাস্তা গিয়াছে, সেই রাস্তার দিকে তাকাইলে তুমি দেখিতে পাও, একটি গরুর গাড়ী যাইতেছে এবং তাহার সম্মুখ দিয়া একটি সাইকেল আরোহীকে লইয়া ছুটিয়া চলিয়াছে। কখনও কখনও দেখিতে পাও ঐ রাস্তা দিয়া মোটর গাড়ী শব্দ করিতে করিতে আগাইয়া যাইতেছে।



চিত্র নং—1

তোমার বাড়ীর পার্শ্বে যে নদীটি রহিয়াছে, সেই নদীর জল কলকল শব্দে বহিয়া যাইতেছে এবং নদীর জলের উপর দিয়া একটি নৌকা নদীর এপার হইতে ওপারে যাইতেছে।

চিত্র নং—2

ভোঁ ভোঁ শব্দ শুনিয়া আকাশের দিকে তাকাইলে তোমরা দেখিতে পাও, এরোপ্লেন শূন্যে ছুটিয়া যাইতেছে। যে-সব বস্তুর কথা বলা হইল, ঐগুলি সব গতিশীল বস্তু এবং ইহারা সর্বদা স্থান পরিবর্তন করিতেছে। আপাত স্থিতিশীল বস্তুও বিভিন্ন সময়ে বিভিন্ন কারণে স্থান পরিবর্তন করে। মনে কর, একটি চেয়ার ও একটি টেবিল ঘরের মধ্যে ছিল। তোমার বন্ধু তোমার বাড়ীতে আসায় তুমি ঐ চেয়ার ও টেবিল ঘর হইতে বারান্দায় বাহির করিয়া আনিলে। ইহাতে টেবিল ও চেয়ার স্থান পরিবর্তন করিল। তোমার বন্ধুটি গরম অনুভব করায় পাখাটির সুইচ টিপিয়া দিলে। পাখাটি স্থির অবস্থায় ছিল, কিন্তু সুইচ টিপার পরেই পাখাটি গতিশীল হইয়া উঠিল।

উপরের উদাহরণ হইতে তোমরা সহজেই বুঝিতে পারিতেছ, বস্তুগুলির গতিশীলতার ফল হইল স্থান পরিবর্তন। বস্তুর গতিকে দুইভাগে ভাগ করা যায়। যেমন—

(1) চলন (Translation) ও (2) ঘূর্ণন (Rotation)।

যে গতির ফলে বস্তুগুলি নির্দিষ্ট দিকে সরল পথে স্থান পরিবর্তন করে, তাহাকে বলে চলন (Translation) এবং যে গতির ফলে বস্তুগুলি নির্দিষ্ট বিন্দুর চারিদিকে ঘুরিতে থাকে, তাহাকে বলে ঘূর্ণন (Rotation)।

গরুর গাড়ী, সাইকেল, রেলগাড়ী, ট্রাম, বাস, নৌকা, জাহাজ প্রভৃতির গতি চলন গতির উদাহরণ। কিন্তু গরুর গাড়ী, বাস, ট্রাম বা রেলগাড়ী প্রভৃতির চাকা একটি নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ঘুরিতে থাকে। সুতরাং ঐ সমস্ত যানবাহনের চাকার গতি ঘূর্ণন গতির উদাহরণ। সেইরূপ, ঘড়ির কাঁটা, বৈদ্যুতিক পাখা প্রভৃতির গতি ঘূর্ণন গতির উদাহরণ।

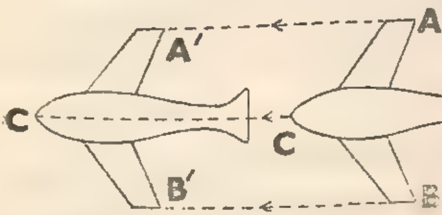
চিত্র নং—3

চলন

(Translation)

চলন সম্বন্ধে একটি সাধারণ ধারণা তোমাদের জন্মিয়াছে। এবার জ্যামিতিক দৃষ্টিকোণ দিয়া চলন কি এবং তাহার ধর্ম কি, তাহা বুঝিবার চেষ্টা কর।

মনে কর, একটি এরোপ্লেন ভূমির সহিত সমান্তরালভাবে আকাশে উড়িয়া যাইতেছে। এরোপ্লেনখানির প্রতি মুহূর্তে অবস্থানের পরিবর্তন ঘটিতেছে, কিন্তু তাহাতে তাহার আকার বা আয়তনের কোন পরিবর্তন ঘটিতেছে না।

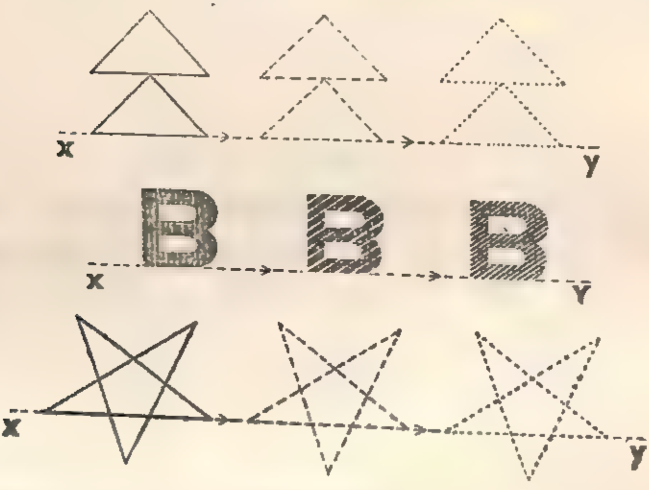


চিত্র নং—4

মনে কর, এরোপ্লেনখানি ABC অবস্থান হইতে A′B′C′ অবস্থানে আসিয়া পৌঁছিয়াছে। এরোপ্লেনখানির চলনের ফলে A বিন্দু AA′

পরিমাণ দূরত্বে এবং B বিন্দু BB´ পরিমাণ দূরত্বে সরিয়া গিয়াছে। চিত্রে মাপিয়া দেখ AA´ ও BB´-এর দূরত্ব পরস্পর সমান। এরোপ্লেন-খানির উপর যে-কোন একটি বিন্দু C লইলে, C বিন্দুও CC´ পরিমাণ সমান দূরত্বে সরিয়া যাইবে। তাহা হইলে দেখিতে পাইতেছ, এরোপ্লেনখানির প্রত্যেকটি বিন্দু চলনের ফলে একই দিকে এবং একই পরিমাণ দূরত্বে স্থান পরিবর্তন করিয়াছে।

নিম্নে চিত্রের সাহায্যে কয়েকটি চলন প্রক্রিয়ার উদাহরণ দেওয়া গেল :



চিত্র নং—5

কালো রং-এর মূল চিত্রগুলি চলনের ফলে $\overrightarrow{xy}$ রেখায় কিভাবে পরিবর্তিত হইয়াছে, লক্ষ্য কর। চলনের সাহায্যে পরিবর্তিত চিত্রগুলিকে বিন্দুর সাহায্যে দেখানো হইয়াছে। লক্ষ্য কর, প্রতিটি চিত্রের প্রত্যেকটি বিন্দু একই দিকে এবং একই পরিমাণ দূরত্বে সরিয়া গিয়াছে।

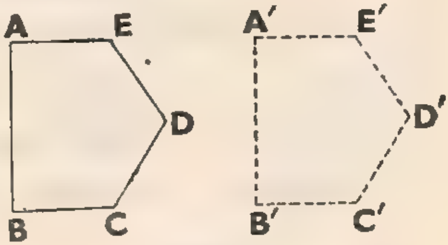
সুতরাং, কোনবস্তু বা চিত্রের প্রতিটি বিন্দুর একই দিকে এবং একই পরিমাণ দূরত্বে স্থান পরিবর্তনকে বস্তুটি বা চিত্রটির চলন

(Translation) বলে এবং বস্তুটি বা চিত্রটির প্রথম অবস্থানের ও পরবর্তী অবস্থানের সরলরেখা বরাবর দূরত্বকে ঐ চলনের সরণ বা চলন দৈর্ঘ্য (Displacement) বলে।

চলনের ধর্ম :

চিত্রটির প্রথম ও দ্বিতীয় অবস্থান লক্ষ্য কর :

(1) চিত্রটির প্রথম অবস্থানের A, B, C, D ও E বিন্দু দ্বিতীয় অবলম্বনে A′, B′, C′, D′ ও E′ বিন্দুতে স্থানান্তরিত হইয়াছে।



চিত্র নং—6

(2) চিত্রে A বিন্দুর AA′ অভিমুখে, B বিন্দুর BB′ অভিমুখে, C বিন্দুর CC′ অভিমুখে, D বিন্দুর DD′ অভিমুখে এবং E বিন্দুর EE′ অভিমুখে সরণ ঘটিয়াছে।

(3) স্কেলের সাহায্যে মাপিয়া দেখ $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = \overline{EE'}$। সুতরাং বলা যায়—(1) চলনের ফলে চলনশীল বস্তু বা চিত্রের প্রতিটি বিন্দুর স্থান পরিবর্তন ঘটে এবং কোন বিন্দুর অবস্থান অপরিবর্তিত থাকে না।

(4) কোন বস্তু বা চিত্রের চলন ঘটিলে ঐ বস্তু বা চিত্রের প্রত্যেক বিন্দুর একই দিকে সরণ হয়।

(5) চলনের ফলে কোন বস্তু বা চিত্রের প্রতিটি বিন্দু সমান দূরত্বে স্থানন্তরিত হয়।

7 নং চিত্রে দেখ, P বিন্দুর চলন রেখা $\overrightarrow{xy}$। ঐ $\overrightarrow{xy}$ সরলরেখায় P বিন্দুর চলন রূপান্তর P′। $\overrightarrow{xy}$ চলন রেখায় এমন দুইটি অংশ

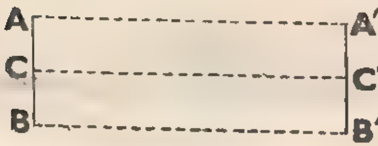
$\overline{PM}$ এবং $\overline{P'N}$ লও যাহারা $\overline{PP'}$ সহিত সমান। $\overrightarrow{xy}$ সরলরেখা বরাবর P বিন্দুকে চালিত করিলে, P বিন্দু যখন P′ বিন্দুতে আসিবে, তখন M বিন্দু P বিন্দুতে এবং P′ বিন্দু N বিন্দুতে আসিবে। চলনের ফলে

চিত্র নং—7

$\overrightarrow{xy}$ রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুগুলির অবস্থান পরিবর্তিত হইতেছে, কিন্তু চলন রেখা $\overrightarrow{xy}$ এর কোন পরিবর্তন হয় নাই।

(6) চলনে চলনের অভিমুখ নির্দেশক সরলরেখা স্থির থাকে।

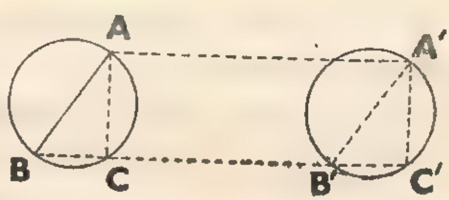
8 নং চিত্রে দেখ, A, B ও C বিন্দুর চলন রূপান্তর যথাক্রমে A′, B′ ও C′। C বিন্দু A ও B-এর মধ্যে অবস্থিত। C বিন্দুর চলন রূপান্তর C′, A ও B-এর চলন রূপান্তর A′ ও B′-এর মধ্যে অবস্থিত।



চিত্র নং—8

(7) দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী কোন বিন্দুর চলন রূপান্তর, ঐ বিন্দুদ্বয়ের চলন রূপান্তরের মধ্যবর্তী হইবে।

9 নং চিত্রে দেখ, A ও B বিন্দুর চলন রূপান্তর A′ ও B′। AB, A′B′, AA′ ও BB′ যোগ কর। মাপিয়া দেখ, $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ এবং $\overline{AB} = \overline{A'B'}$। আবার A ও A′ বিন্দু হইতে



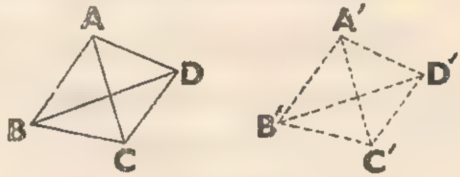
চিত্র নং—9

অঙ্কিত লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে $\overline{AC}$ ও $\overline{A'C'}$ পরস্পর সমান। $\overline{AA'}$ এবং $\overline{BB'}$

পরস্পর সমান্তরাল, ইহা চলনের নিজস্ব ধর্ম। অতএব $\overline{AB}$ এবং $\overline{A'B'}$ পরস্পর সমান্তরাল।

অতএব, (8) চলনে কোন বস্তু বা চিত্রের যে-কোন দুইটি বিন্দু একই দূরত্ব বরাবর সমান্তরাল ভাবে স্থান পরিবর্তন করে।

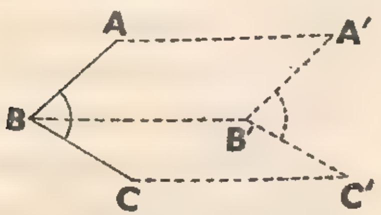
10 নং চিত্রে দেখ, ABCD চতুর্ভুজের A, B, C ও D বিন্দুগুলি চলনের ফলে A', B', C' ও D' বিন্দুতে রূপান্তরিত হইয়াছে। সুতরাং $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ও $\overline{AD}$ সরলরেখা সমূহের রূপান্তর $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$ ও $\overline{A'D'}$ সরলরেখা। মাপিয়া দেখ, A বিন্দু হইতে B বিন্দু, C বিন্দু এবং D বিন্দুর অবস্থান যতদূরে A' বিন্দু হইতে B' বিন্দু, C' বিন্দু এবং D' বিন্দুর অবস্থান ঠিক ততদূরে। আবার B বিন্দু হইতে A বিন্দু, C বিন্দু ও D বিন্দুর অবস্থান যতদূরে, B' বিন্দু হইতে A' বিন্দু ; C' বিন্দু ও D' বিন্দুর অবস্থান ঠিক ততদূরে।



চিত্র নং—10

সুতরাং (9) চলনের ফলে কোন বস্তু বা চিত্রের বিন্দুগুলি পরস্পরের তুলনায় অবস্থান পরিবর্তন করে না।

11 নং চিত্রে দেখ, $\angle ABC$, চলনের ফলে $\angle A'B'C'$ কোণে রূপান্তরিত হইয়াছে। A, B ও C বিন্দুর রূপান্তর A' B' ও C' বিন্দু এবং $\overline{AB}$ ও $\overline{BC}$ রেখার রূপান্তর $\overline{A'B'}$ ও $\overline{B'C'}$ রেখা এখন $\angle ABC$ কোণের A বিন্দু A' বিন্দুতে, B বিন্দু B'



চিত্র নং—11

বিন্দুতে, C বিন্দু C′ বিন্দুতে আনিলে ∠ABC কোণ ∠A′B′C′ কোণের সহিত সর্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে।

আবার, $\overline{AB}$ হইতে BC-তে যাইতে হইলে যেভাবে দিক পরিবর্তন করিতে হয়, $\overline{A'B'}$ হইতে $\overline{B'C'}$ যাইতে হইলেও ঠিক সেইভাবে দিক পরিবর্তন করিতে হয়।

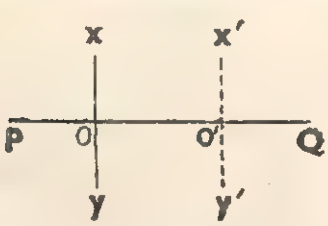
সুতরাং (10) যে-কোন কোণ ও তাহার চলন কোণ সর্বাংশে সমান এবং উভয়ের দিক্‌বিন্যাস একই প্রকার।

চলনের সাহায্যে প্রতিবিম্ব চিত্র অঙ্কন :

চলনের সাহায্যে প্রতিবিম্ব চিত্র অঙ্কন করিতে হইলে (1) চলনের দিক ও (2) চলনের দৈর্ঘ্য জানা প্রয়োজন। নিম্নে চলনের সাহায্যে প্রতিবিম্ব চিত্র অঙ্কনের কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া গেল :

উদাহরণ 1. নীচে $\overline{XY}$ সরলরেখা $\overline{PQ}$ অভিমুখে 1·5 সে. মি. চালিত হইলে যে অবস্থান গ্রহণ করিবে, তাহা আঁকিয়া দেখাও।

মূল চিত্রের উপর ট্রেসিং পেপার রাখ। ট্রেসিং পেপার $\overline{xy}$-এর প্রতিলিপি $\overline{x'y'}$ $\overline{PQ}$-এর প্রতিলিপি $\overline{P'Q'}$ এবং $\overline{xy}$ ও $\overline{PQ}$ রেখার ছেদবিন্দু O এর প্রতিলিপি O′ লও। ট্রেসিং পেপার মূল চিত্র হইতে সরাইয়া লও। মূলচিত্রে $\overline{PQ}$ সরলরেখায় O বিন্দু হইতে 1·5 সে. মি. দূরে O′ বিন্দু লও। এখন প্রতিলিপিটিকে মূলচিত্রের উপর রাখিয়া এমন ভাবে চালিত কর যেন $\overline{P'Q'}$ মূল চিত্রের $\overline{PQ}$ রেখা বরাবর

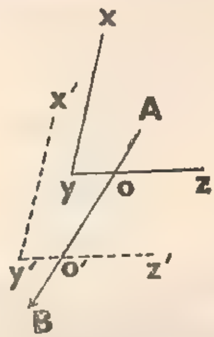


চিত্র নং—12

সরিতে থাকে। প্রতিলিপির O′ বিন্দু যখন মূল চিত্রের O′ বিন্দুর উপর

আসিবে, তখন প্রতিলিপির চলন বন্ধ কর। প্রতিলিপিতে $\overline{x'y'}$ রেখার উপর পেন্সিল চালাও। এখন মূল চিত্রের উপর হইতে প্রতিলিপিটি সরাইয়া লও। মূল চিত্রে $\overline{x'y'}$ রেখার যে দাগ পড়িয়াছে তার উপর $\overline{x'y'}$ রেখা অঙ্কন কর। তাহা হইলে PQ অভিমুখে 1·5 সে. মি. চালিত হইয়া $\overline{xy}$ রেখার নূতন অবস্থান হইল $\overline{x'y'}$ রেখা।

উদাহরণ 2. $\overrightarrow{AB}$ অভিমুখে $\angle xyz$ কোণের 1·4 সে. মি. চলন দেখাও।



চিত্র নং—13

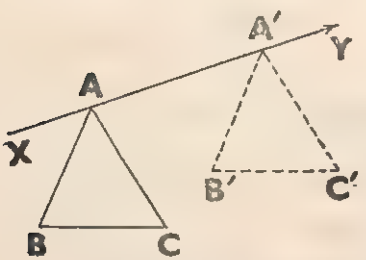
মূল চিত্রের উপর ট্রেসিং পেপার বসাইয়া $\angle xyz$ কোণের প্রতিলিপি $\angle x'y'z'$, $\overrightarrow{AB}$-এর প্রতিলিপি $\overrightarrow{A'B'}$ এবং yz ও $\overrightarrow{AB}$ ছেদবিন্দু o-এর প্রতিলিপি o′ লও। মূলচিত্রের উপর হইতে ট্রেসিং পেপার সরাইয়া লও। $\overrightarrow{AB}$ রেখায় o বিন্দু হইতে 1·4 সে.মি. দূরে o′ বিন্দু লও। এখন মূল চিত্রের উপর প্রতিলিপিটিকে রাখিয়া এমনভাবে প্রতিলিপিটিকে চালিত কর যেন $\overrightarrow{A'B'}$ রেখা $\overrightarrow{AB}$ রেখা বরাবর সরিতে থাকে। প্রতিলিপির o′ বিন্দু যখন মূলচিত্রের o′ বিন্দুর উপর আসিবে, তখন প্রতিলিপির চলন বন্ধ কর। প্রতিলিপির $\angle x'y'z'$ কোণের উপর পেন্সিল চালাও যাহাতে কাগজে দাগ পড়ে। প্রতিলিপিটিকে মূল চিত্রে $\angle x'y'z'$ চিহ্নিত কর।

তাহা হইলে $\overrightarrow{AB}$ অভিমুখে $\angle xyz$ কোণের 1·4 সে. মি. দূরে চলন-রূপান্তর হইল $\angle x'y'z'$।

উদাহরণ 3. ABC ত্রিভুজের A বিন্দুর উপর দিয়া $\overleftrightarrow{XY}$ রেখা

চলিয়া গিয়াছে। $\overrightarrow{xy}$ অভিমুখে ABC ত্রিভুজটি 2·3 সে. মি. চালিত হইলে যে অবস্থান গ্রহণ করিবে, তাহা আঁকিয়া দেখাও।

চিত্রটির উপর ট্রেসিং পেপার রাখিয়া ABC ত্রিভুজের প্রতিলিপি A′B′C′ ত্রিভুজ $\overline{xy}$ এর প্রতিলিপি $x'y'$ লও। প্রতিলিপিটিকে সরাইয়া মূলচিত্রে $\overline{xy}$ রেখায় A বিন্দু হইতে 2·3 সে. মি. দূরে A′ বিন্দু লও। এখন প্রতিলিপিটিকে মূল চিত্রের উপর রাখিয়া এমন ভাবে চালিত কর যেন $\overline{x'y'}$ রেখা $\overline{xy}$ রেখা বরাবর সরিতে থাকে। প্রতিলিপির A′ বিন্দু মূলচিত্রের A′ বিন্দুর উপর আসিলে প্রতিলিপির চলন বন্ধ কর। প্রতিলিপির A′B′C′ ত্রিভুজের উপর পেন্সিল চালাও, যেন কাগজে দাগ পড়ে। এখন প্রতিলিপি সরাইয়া A′B′C′ ত্রিভুজে চিহ্নিত কর।



চিত্র নং 14

তাহা হইলে $\overrightarrow{xy}$ অভিমুখে 2·3 সে. মি. দূরে চালিত হইয়া ABC ত্রিভুজ-এর △A′B′C′ চলন রূপান্তর হইল।

অনুশীলনী

1. বস্তুর গতিকে কয়ভাগে ভাগ করা যায়? কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে বস্তুর বিভিন্ন গতি বুঝাইয়া দাও।

2. চলন কাহাকে বলে? চলন-দৈর্ঘ্য কাহাকে বলে? চলনের কয়েকটি উদাহরণ দাও।

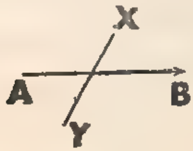
3. 'চলনে কোন জ্যামিতিক আকৃতির যে-কোন দুইটি বিন্দু একই দূরত্ব বরাবর সমান্তরালভাবে স্থান পরিবর্তন করে,'—চিত্র আঁকিয়া বুঝাইয়া দাও।

4. 'চলনের ফলে কোন সরলরেখার প্রতিটি বিন্দু সমান দূরত্বে স্থানান্তরিত হয়'—চিত্র আঁকিয়া বুঝাইয়া দাও।

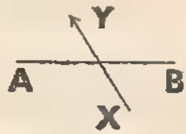
5. চলনের ধর্মগুলি কি কি ?

6. নিম্নলিখিত জ্যামিতিক আকৃতিগুলি প্রতিলিপি খাতায় আঁক এবং প্রশ্নের নির্দেশ অনুসারে চিত্র অঙ্কন কর :

(i) $\overrightarrow{AB}$ অভিমুখে $\overline{XY}$ রেখার 2 সে. মি. চলন দেখাও।



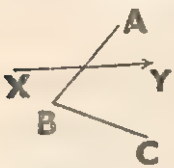
চিত্র নং – 15



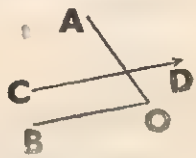
চিত্র নং – 16

(ii) $\overrightarrow{XY}$ অভিমুখে $\overline{AB}$ রেখার 2·5 সে. মি. চলন দেখাও।

(iii) $\overrightarrow{XY}$ অভিমুখে $\angle ABC$ কোণের 3 সে. মি. চলন দেখাও।



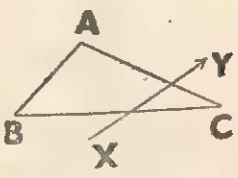
চিত্র নং – 17



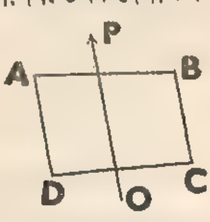
চিত্র নং – 18

(iv) $\overrightarrow{CD}$ অভিমুখে $\angle AOB$ কোণের 2 সে. মি. চলন দেখাও।

(v) $\overrightarrow{XY}$ অভিমুখে ABC ত্রিভুজের 2·5 সে. মি. চলন দেখাও।



চিত্র নং – 19



চিত্র নং – 20

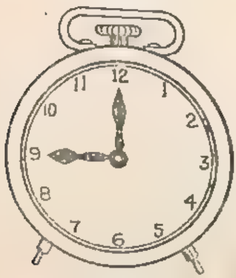
(vi) $\overrightarrow{OP}$ অভিমুখে ABCD চতুর্ভুজের 2 সে. মি. চলন দেখাও।

ঘূর্ণন

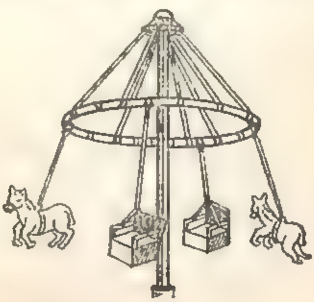
(Rotation)

ঘূর্ণন এক প্রকার স্থানান্তরকরণ। তবে প্রতিফলন ও চলনের সহিত ইহার অনেক দিক দিয়া পার্থক্য রহিয়াছে। প্রতিফলনে, চলনে বা ঘূর্ণনে কোন বস্তু বিশেষের অবস্থানের পরিবর্তন হয়। কিন্তু ঘূর্ণনে একটি বিন্দু স্থির থাকে এবং সেই স্থির বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া বস্তুটি বৃত্তাকার পথে অবস্থান পরিবর্তন করে।

কোন নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া বৃত্তাকার পথে স্থান পরিবর্তন করে এইরূপ নানা বস্তু প্রতিদিন তোমরা দেখিতে পাও। যেমন ঘড়ির ঘণ্টার ও মিনিটের কাঁটাগুলি ঘড়ির কেন্দ্রের চারিদিকে ঘুরিতেছে। তোমরা যখন বৈদ্যুতিক পাখার সুইচ খোল, তখন পাখা ঘুরিতে আরম্ভ করে। তোমরা যখন সাইকেল চালাও, তখন সাইকেলের প্যাডেলে পা দিলে, গিয়ার চাকা ফ্রি হুইলের চাকা ও সাইকেলের চাকা ঘুরিতে আরম্ভ করে। মেলায় নাগরদোলা বা ঘোড়ার দোলাতে তোমরা অনেকে চড়িয়াছ। নাগরদোলার বাক্সগুলি যে কাঠগুলির সঙ্গে যুক্ত, সেই কাঠগুলি যখন বৃত্তাকার পথে ঘুরিতে থাকে, বাক্সগুলিও ঐ কাঠগুলির ঘূর্ণনের সঙ্গে সঙ্গে স্থান পরিবর্তন করে। ঘোড়ার দোলার ঘোড়াগুলি একটি শক্ত লৌহদণ্ডকে কেন্দ্র করিয়া অনুভূমিক সমতলে ঘুরিতে থাকে।



চিত্র নং—21



চিত্র নং—22

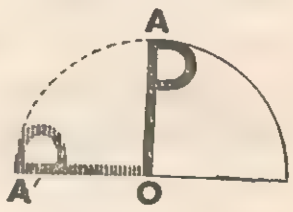
বইয়ের পৃষ্ঠা উল্টাইবার সময় তাহার একটি দিক সেলাইয়ের দিকে স্থির থাকিয়া পার্শ্ব পরিবর্তন করে। ইহাও এক প্রকার ঘূর্ণন।

অতএব, একটি নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া কোন বস্তু বা চিত্রের একই সমতলে ও বৃত্তাকার পথে যে-কোনো কোণে অবস্থান পরিবর্তনকে ঘূর্ণন বলে।

যে নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া বস্তু বিশেষ বৃত্তাকার পথে অবস্থান পরিবর্তন করে, তাহাকে ঘূর্ণন কেন্দ্র বলে।

ঘূর্ণনের পর রূপান্তরিত বস্তুকে মূলবস্তুর প্রতিবিম্বও বলা যাইতে পারে।

চিত্রে P-এর প্রথম অবস্থান A বিন্দু। O-কে কেন্দ্র করিয়া উহা ঘূর্ণিত হইয়া A′ বিন্দুতে অবস্থান করিতেছে। P-এর A′ বিন্দুর অবস্থান, P-এর প্রথম অবস্থানের প্রতিবিম্ব। O কেন্দ্রের সহিত A বিন্দুতে অবস্থিত P এবং A′ বিন্দুতে অবস্থিত P-এর প্রতিবিম্ব যোগ করিলে $\overline{AO}$ এবং $\overline{A'O}$ রেখা দুইটি পাওয়া যায়। এই দুইটি সরলরেখা O কেন্দ্রে $\angle AOA'$ কোণ উৎপন্ন করে। এই $\angle AOA$ কোণ হইল ঘূর্ণন কোণ।

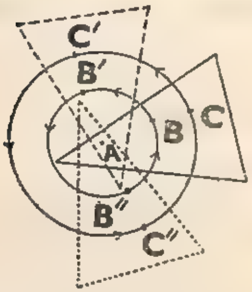


চিত্র নং—23

সুতরাং কোন বস্তুকে এবং ঘূর্ণনের ফলে সৃষ্ট তাহার প্রতিবিম্বকে ঘূর্ণন কেন্দ্রের সহিত যুক্ত করিলে যে-কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাকে ঘূর্ণন কোণ বলে।

ঘূর্ণনের ধর্ম ঃ

একটি পোস্টকার্ড লও। ইহা হইতে ত্রিভুজাকৃতি একটি অংশ কাটিয়া লও এবং ইহাতে কাঁটা কম্পাস দিয়া A, B ও C তিনটি ছিদ্র কর। তোমার খাতার উপর ত্রিভুজাকার পোস্টকার্ডের খণ্ডটিকে রাখ। উহার A বিন্দুতে কাঁটা-কম্পাসের কাঁটা বসাও এবং কাঁটাটিকে চাপিয়া ধর। এখন ত্রিভুজাকার পোস্টকার্ডের খণ্ডটির B বিন্দুতে এবং পরে C বিন্দুতে পেন্সিলের সীস ঢুকাইয়া উহার সাহায্যে পোস্টকার্ডের খণ্ডটিকে ঘুরাইতে থাক। দেখ, B ও C বিন্দুর ঘূর্ণন পথ তোমার খাতায় অঙ্কিত হইয়া যাইতেছে।



চিত্র নং—24

(i) যদি A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া প্রথমে AB এবং পরে AC পরিমাণ ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্ত অঙ্কন কর, তাহা হইলে ঐ বৃত্ত দুইটি B ও C বিন্দুদ্বয়ের ঘূর্ণন পথের সহিত মিলিয়া যাইবে।

(ii) লক্ষ্য কর ঘূর্ণণের ফলে ঘূর্ণনকেন্দ্র A বিন্দু স্থির রহিয়াছে।

(iii) ত্রিভুজাকৃতি পোস্টকার্ডের খণ্ডটিকে 360° কোণে ঘুরাইয়া প্রথম অবস্থায় আনা হইয়াছে। ইহাতে B বিন্দু ও C বিন্দু পূর্ব অবস্থায় ফিরিয়া আসিয়াছে।

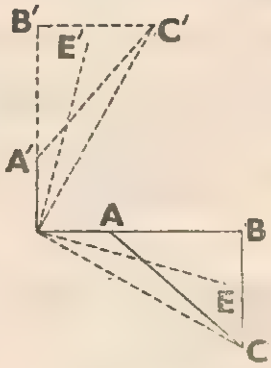
সুতরাং (1) ঘূর্ণনের ফলে কোন বস্তু বা চিত্রের প্রত্যেকটি বিন্দু বৃত্তাকার পথে স্থানান্তরিত হয় এবং ঘূর্ণন কেন্দ্রই বৃত্তাকার পথের কেন্দ্র।

(2) ঘূর্ণনের সময় ঘূর্ণন কেন্দ্র স্থির থাকে।

(3) কোন বস্তু বা চিত্রকে 360° কোণে ঘুরাইলে উহা পূর্ব অবস্থায় ফিরিয়া আসে, ফলে বস্তু বা চিত্রমধ্যস্থ সমস্ত বিন্দু ও রেখাংশগুলি পূর্বস্থান অধিকার করে।

চিত্রে ABC ত্রিভুজটি O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া 90° কোণে আবর্তিত হইয়া প্রথম অবস্থান E হইতে E´ বিন্দুতে অবস্থান করিতেছে। E´ বিন্দুতে A´B´C´ ত্রিভুজ হইতেছে ABC ত্রিভুজের প্রতিবিম্ব। ABC ত্রিভুজের মধ্যস্থিত E বিন্দুটি A´B´C´ ত্রিভুজের মধ্যে E´ বিন্দুরূপে অবস্থান করিতেছে।

মাপিয়া দেখ, ∠AOA´, ∠COC´ এবং ∠EOE´, প্রত্যেকটি কোণের পরিমাণ 90°



চিত্র নং—25

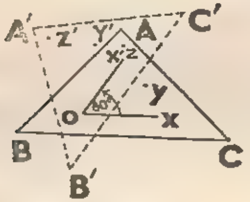
সুতরাং ঘূর্ণন কেন্দ্র ও ঘূর্ণন কোণের পরিমাণ জানা থাকিলে ঘূর্ণায়মান বস্তুর বা চিত্রের স্থান পরিবর্তনের পরিমাণ ও অবস্থান জানিতে পারা যায়।

লক্ষ্য কর, ত্রিভুজটির ঘূর্ণন ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে হইয়াছে। সুতরাং উহার ফলে যে ঘূর্ণন কোণ উৎপন্ন হইয়াছে, তাহা ধনাত্মক কোণ।

কিন্তু ত্রিভুজটিকে যদি ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে, সেইদিকে ঘুরান যাইত, তাহা হইলে ঘূর্ণন কোণটি ঋণাত্মক কোণ হইত।

কোন বস্তু-বিশেষ বা চিত্র যে স্থানে রহিয়াছে, কোন নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া বৃত্তাকার পথে ঘুরিয়া যদি সেই স্থানে ফিরিয়া আসে, তবে বস্তুটির একবার ঘূর্ণন হয়; এই ঘূর্ণনকে বলে সম্পূর্ণ ঘূর্ণন। সম্পূর্ণ ঘূর্ণন কোণের পরিমাণ 360° বা 4 সমকোণ। কিন্তু কোন বস্তু বা চিত্র যদি বৃত্তাকার পথে প্রথম অবস্থা হইতে সম্পূর্ণ বিপরীত দিকে 180° কোণে অবস্থান করে, তবে বস্তুটির অর্ধ-ঘূর্ণন হয়।

ABC একটি ত্রিভুজ। উহার মধ্যে o, x, y ও z এই চারিটি বিন্দু রহিয়াছে। এখন ত্রিভুজটির উপর ট্রেসিং পেপার বসাইয়া ত্রিভুজটির প্রতিলিপি A′B′C′ ত্রিভুজ এবং o, x, y ও z বিন্দুগুলির প্রতিলিপি o, x', y' ও z' লও। o বিন্দুতে পেন্সিল কম্পাসের কাঁটা বসাও এবং প্রতিলিপিটিকে আস্তে আস্তে এমন ভাবে ঘুরাইতে আরম্ভ কর যেন $\angle xox' = 60^\circ$ হয়। প্রতিলিপিটির ঘূর্ণন বন্ধ কর। এবার ঘূর্ণনজনিত বৈশিষ্ট্যগুলি লক্ষ্য কর।



চিত্র নং—26

(a) ঘূর্ণনের ফলে ABC ত্রিভুজটির আকার ও আয়তনের কোন পরিবর্তন ঘটে নাই।

(b) মাপিয়া দেখ $\overline{OX} = \overline{OX'}$, $\overline{OY} = \overline{OY'}$, $\overline{OZ} = \overline{OZ'}$

(c) ঘূর্ণনের ফলে $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$ ও $\overline{ZX}$ দিক পরিবর্তন করিয়া $\overline{x'y'}$, $\overline{y'z'}$ ও $\overline{z'x'}$ এ পরিবর্তিত হইয়াছে।

(d) ঘূর্ণনের ফলে ত্রিভুজের মধ্যস্থিত বিন্দুগুলির সংযোজক রেখা দিক পরিবর্তন করিলেও xyz, yzx, zxy এবং ABC প্রভৃতির ক্রম পরিবর্তন হয় নাই।

(e) চাঁদার সাহায্যে মাপিয়া দেখ $\angle xox' = \angle yoy' = \angle zoz' = 60^\circ$, সুতরাং $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ $\overline{OZ}$ রেখা 60° কোণে ঘুরিয়া $\overline{OX'}$, $\overline{OY'}$ এবং $\overline{OZ'}$ রেখায় পরিবর্তিত হইয়াছে।

ঘূর্ণনের ফলে $\angle ABC$, $\angle ACB$ ও $\angle BAC$ কোণ যথাক্রমে $\angle A'B'C'$, $\angle A'C'B'$ ও $\angle B'A'C'$ কোণে রূপান্তরিত হইয়াছে এবং মূল কোণ ও উহার প্রতিবিম্ব কোণ সর্বাংশে সমান। $\overline{AB}$ ও $A'B'$, $\overline{BC}$ ও $B'C'$ এবং ও $\overline{AC}$ ও $A'C'$ প্রভৃতি রেখার দিক বিন্যাস একই ধরনের।

(4) ঘূর্ণনের ফলে বস্তু বা চিত্রের আকার ও আয়তনের কোনো পরিবর্তন হয় না।

(5) ঘূর্ণনের ফলে বস্তু বা চিত্রের মধ্যে অবস্থিত বিন্দুগুলির দূরত্বের পরিবর্তন ঘটে না।

(6) ঘূর্ণনর ফলে বস্তু বা চিত্রের যে-কোন দুই বিন্দুর সংযোজক সরলরেখার দিক পরিবর্তন ঘটে।

(7) ঘূর্ণনের ফলে বস্তু বা চিত্রের বিন্দুগুলির ক্রম পরিবর্তন হয় না।

(8) ঘূর্ণনের ফলে বস্তু বা চিত্রের কোণের পরিমাণ ও দিক বিন্যাস অপরিবর্তিত থাকে এবং প্রত্যেক রেখাংশ একই কোণে আবর্তিত হয়।

প্রতিফলন, চলন ও ঘূর্ণনের তুলনা

প্রতিফলন, চলন ও ঘূর্ণনের ফলে কোন বস্তু বা চিত্রের অবস্থানের পরিবর্তন ঘটে। কিন্তু ইহাদের প্রভাবে বস্তু বা চিত্রের (i) আকার ; (ii) আয়তন ; (iii) বস্তু বা চিত্রমধ্যস্থ বিন্দুসমূহ ও উহাদের দূরত্ব ; (iv) বস্তু বা চিত্র মধ্যস্থ কোণ অপরিবর্তিত থাকে। প্রতিফলনে প্রতিফলন অক্ষের প্রতিটি বিন্দু এবং ঘূর্ণনে ঘূর্ণনকেন্দ্র স্থান পরিবর্তন না করিলেও চলনের ফলে বস্তু বা চিত্রের প্রতিটি বিন্দুর স্থান পরিবর্তন ঘটে। প্রতিফলনের ফলে কোন বস্তু বা চিত্রের দিক বিন্যাস ও অভিমুখের পরিবর্তন ঘটে। কিন্তু ঘূর্ণনের ফলে বস্তু বা চিত্রের দিক বিন্যাসের পরিবর্তন ঘটিলেও অভিমুখ অপরিবর্তিত থাকে, কিন্তু চলনে কোন বস্তু বা চিত্রের দিক বিন্যাস ও অভিমুখের পরিবর্তন হয় না।

ছকের সাহায্যে প্রতিফলন, চলন ও ঘূর্ণনের বিশেষত্বগুলি তুলনা করিয়া দেখান হইল ঃ

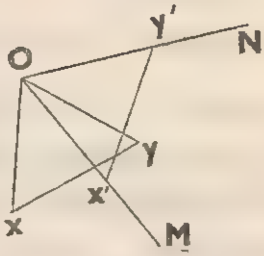
	অপরিবর্তিত বিন্দু	দৈর্ঘ্য	কোণ	আকার	আয়তন	অভিমুখ	দিগ্‌ বিন্যাস
প্রতিফলন	প্রতিফলন অক্ষের প্রতিটি বিন্দু	অপরিবর্তিত থাকে	অপরিবর্তিত থাকে	অপরিবর্তিত থাকে	অপরিবর্তিত থাকে	পরিবর্তন হয়	পরিবর্তিত হয়
চলন	নাই	অপরিবর্তিত থাকে	অপরিবর্তিত থাকে	অপরিবর্তিত থাকে	অপরিবর্তিত থাকে	অপরিবর্তিত থাকে	অপরিবর্তিত থাকে
ঘূর্ণন	ঘূর্ণন কেন্দ্র	অপরিবর্তিত থাকে	অপরিবর্তিত থাকে	অপরিবর্তিত থাকে	অপরিবর্তিত থাকে	অপরিবর্তিত থাকে	পরিবর্তিত হয়

ঘূর্ণনের চিত্র অঙ্কন

কোন জ্যামিতিক আকৃতির ঘূর্ণনজনিত চিত্রাঙ্কন করিতে হইলে (i) ঘূর্ণন কেন্দ্র ও (ii) ঘূর্ণন কোণ জানা প্রয়োজন।

উদাহরণ 1. নীচের $\overline{XY}$ রেখার ঘূর্ণন কেন্দ্র O। $\overline{XY}$ রেখাকে 45° কোণে ঘুরাইলে যে অবস্থান গ্রহণ করিবে, তাহা আঁকিয়া দেখাও।

অঙ্কন ঃ OX যোগ কর। $\overline{OX}$ রেখার O বিন্দুতে চাঁদার সাহায্যে 45° কোণ $\angle XOM$ আঁক। $\overrightarrow{OM}$ হইতে $\overline{OX}$ এর সমান করিয়া $\overline{OX'}$ কাটিয়া লও। অনুরূপভাবে OY যোগ কর এবং $\overline{OY}$ রেখার O বিন্দুতে 45° কোণ $\angle YON$ আঁক। $\overrightarrow{ON}$ হইতে $\overline{OY}$-এর সমান করিয়া $\overline{OY'}$ অংশ কাটিয়া লও। X' ও Y' যোগ কর। তাহা হইলে O-কে কেন্দ্র করিয়া 45° কোণে ঘূর্ণনের ফলে $\overline{XY}$-এর নূতন অবস্থান হইল $\overline{X'Y'}$।



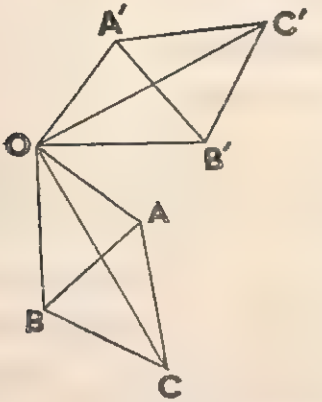
চিত্র নং—27

মাপিয়া দেখ $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$

উদাহরণ 2. অপর পৃষ্ঠায় চিত্রে ABC ত্রিভুজের ঘূর্ণন কেন্দ্র O। O-কে কেন্দ্র করিয়া ABC ত্রিভুজটিকে 90° কোণে ঘুরাইলে যে অবস্থান গ্রহণ করিবে, তাহা আঁকিয়া দেখাও।

OA যোগ কর। $\overline{OA}$ রেখার O বিন্দুতে 90° কোণের সমান $\angle AOA'$ আঁক, যেন $\overline{OA} = \overline{OA'}$ হয়। OB যোগ কর।

$\overline{OB}$ রেখার O বিন্দুতে 90° কোণের সমান $\angle BOB'$ আঁক, যেন $\overline{OB} = \overline{OB'}$ হয়। অনুরূপভাবে OC যোগ করিয়া $\overline{OC}$ রেখার O বিন্দুতে 90° কোণের সমান করিয়া $\angle COC'$ আঁক যেন $\overline{OC} = \overline{OC'}$ হয়। এখন $A'B'$, $A'C'$ এবং $B'C'$ যোগ কর। তাহা হইলে $A'B'C'$ ত্রিভুজ হইল O-কে কেন্দ্র করিয়া ABC ত্রিভুজের 90° কোণে ঘূর্ণনের ফলে নূতন অবস্থান।

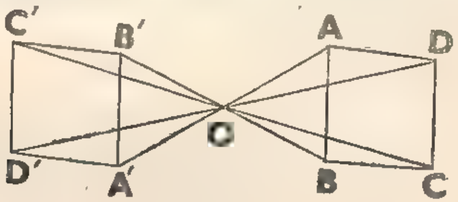


চিত্র নং—28

মাপিয়া দেখ, $AB = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ এবং $\overline{BC} = B'C'$।

উদাহরণ 3. চিত্রে ABCD চতুর্ভুজের ঘূর্ণন কেন্দ্র O। O-কে কেন্দ্র করিয়া ABCD চতুর্ভুজটিকে 180° কোণে ঘুরাইলে যে অবস্থান গ্রহণ করিবে, তাহা আঁকিয়া দেখাও।

ঘূর্ণন কেন্দ্র O-এর সহিত A, B, C ও D বিন্দু যোগ করিয়া উহাদিগকে এমনভাবে বর্ধিত কর যেন $\overline{OA} = \overline{OA'}$, $\overline{OB} = \overline{OB'}$,



চিত্র নং—29

$\overline{OC} = \overline{OC'}$ এবং $\overline{OD} = \overline{OD'}$ হয়।

$A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ এবং $A'D'$ যোগ কর।

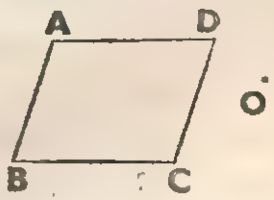
এখন A′B′C′D′ চতুর্ভুজটি হইল O-কে কেন্দ্র করিয়া ABCD চতুর্ভুজটির 18° কোণে ঘূর্ণনের পর নূতন অবস্থান।

মাপিয়া দেখ $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\overline{CD} = \overline{C'D'}$ এবং $\overline{AD} = \overline{A'D'}$ ।

অনুশীলনী

1. ঘূর্ণন কাহাকে বলে ? ঘূর্ণনের কয়েকটি উদাহরণ দাও।
2. ঘূর্ণন কেন্দ্র ও ঘূর্ণন কোণ কাহাকে বলে ? ধনাত্মক কোণ ও ঋণাত্মক কোণ বলিতে কি বুঝ ?
3. ঘূর্ণনের কয়েকটি ধর্মের উল্লেখ কর।
4. 'ঘূর্ণনের ফলে কোন ত্রিভুজের মধ্যস্থিত বিন্দুগুলির দূরত্বের পরিবর্তন ঘটে না'—চিত্র আঁকিয়া বুঝাইয়া দাও।
5. বস্তুর চলন ও ঘূর্ণনের মধ্যে পার্থক্য কি ?
6. বস্তুর প্রতিফলন ও ঘূর্ণনের মধ্যে পার্থক্য কি ?
7. প্রতিফলন, চলন ও ঘূর্ণনের তুলনা কর।
8. নীচে (চিত্র নং 30) $\overline{AB}$ রেখার ঘূর্ণন কেন্দ্র O। $\overline{AB}$ রেখাটিকে 40° কোণে ঘুরাইলে যে যে অবস্থান গ্রহণ করিবে, তাহা আঁকিয়া দেখাও। [প্রথমে খাতায় চিত্রটির প্রতিলিপি লও]
9. কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ত্রিভুজটিকে 90° কোণে ঘুরাইলে ত্রিভুজটি যে অবস্থান গ্রহণ করিবে তাহা আঁকিয়া দেখাও।
10. নীচে (চিত্র নং 31) ABCD চতুর্ভুজের ঘূর্ণন কেন্দ্র O. O-কে কেন্দ্র

চিত্র নং—30



চিত্র নং—31

করিয়া ABCD চতুর্ভুজটিকে 180° কোণে ঘুরাইলে যে অবস্থান গ্রহণ করিবে, তাহা আঁকিয়া দেখাও। [প্রথমে খাতায় চিত্রটির প্রতিলিপি লও]

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

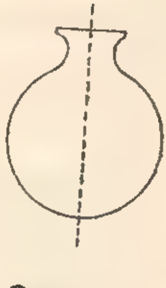
সমবাহু ত্রিভুজ, সামান্তরিক, বৃত্ত প্রভৃতি জ্যামিতিক চিত্রের ঘূর্ণন প্রতিসাম্যের ধারণা

[Idea of rotational symmetry in geometrical figures like equilateral triangle, parallelogram, circle etc.]

প্রতিসাম্য, ঘূর্ণন প্রতিসাম্য, ঘূর্ণন প্রতিসাম্য অক্ষ ও বিন্দু প্রতিসাম্য ঃ

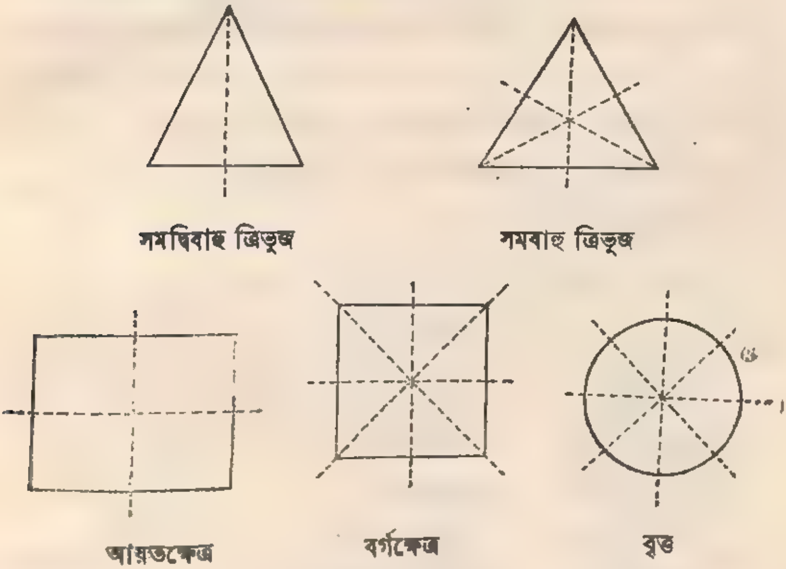
তোমরা সকলেই প্রতিদিন আয়না ব্যবহার কর এবং আয়নাতে তোমরা তোমাদের প্রতিবিম্ব দেখিতে পাও। আয়নাতে তোমাদের শরীরের বামপার্শ্বের অঙ্গগুলিকে প্রতিবিম্বের ডানপার্শ্বের অঙ্গরূপে এবং তোমাদের শরীরের ডানপার্শ্বের অঙ্গগুলিকে প্রতিবিম্বের বামপার্শ্বের অঙ্গরূপে দেখিতে পাও। নাকের মধ্যভাগ দিয়া একটি কল্পিত রেখা টানিলে ঐ রেখার বামপার্শ্বের অঙ্গগুলির সহিত ডানপার্শ্বের অঙ্গগুলি মিলিয়া যায়—ইহা আয়নায় তোমাদের প্রতিবিম্ব দেখিবার সময় অনেক লক্ষ্য করিয়াছ।

চিত্রে দেখিতে পাইতেছ, একটি রেখা দ্বারা চিত্রটিকে দুইটি সমান অংশে ভাগ করা হইয়াছে। এই রেখা বরাবর ছবিটিকে ভাঁজ করিলে ছবিটির এক পার্শ্বের সহিত অপর পার্শ্ব সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া যাইবে। বস্তু বা চিত্রের এই ধর্মকে **প্রতিসাম্য** বলে এবং যে রেখা বরাবর বস্তু বা চিত্রকে দুইটি সমান ভাগে ভাগ করা যায়, তাহাকে **প্রতিসাম্য** রেখা বা **প্রতিসাম্য** অক্ষ বলে।



চিত্র নং—32

নীচের জ্যামিতিক চিত্রগুলি লক্ষ্য কর ঃ



চিত্র নং—33

চিত্রে দেখ, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের প্রতিসাম্য রেখা একটিমাত্র রহিয়াছে, কিন্তু সমবাহু ত্রিভুজে তিনটি, আয়তক্ষেত্রে দুইটি, বর্গক্ষেত্রে চারটি এবং বৃত্তে অসংখ্য প্রতিসাম্য রেখা বা প্রতিসাম্য অক্ষ রহিয়াছে। উপরের চিত্রগুলিকে উহাদের যে-কোন একটি প্রতিসাম্য রেখায় প্রতিফলন ঘটাইলে চিত্রগুলির অবস্থানের কোন পরিবর্তন হইবে না।

সুতরাং, কোন বিশেষ আকৃতি বিশিষ্ট কোন জ্যামিতিক চিত্র যদি অনুরূপ জ্যামিতি আকৃতি-বিশিষ্ট অন্য একটি জ্যামিতিক চিত্রের সহিত সর্বতোভাবে মিলিয়া যায়, তবে ঐ চিত্র দুইটির একটিকে অপরটির প্রতিসম বলে।

প্রতিফলনের ফলে কোন জ্যামিতিক আকৃতির যে প্রতিসাম্য পরিলক্ষিত হয়, তাহাকে রৈখিক প্রতিসাম্য বা দ্বিপার্শ্বিক প্রতিসাম্য বলে।

ঘূর্ণনের ফলে কোন জ্যামিতিক আকৃতির প্রতিবিম্ব যদি একই রূপ হয় বা প্রতিসম হয়, তবে তাহাকে ঘূর্ণন প্রতিসাম্য (Rotational symmetry) বলে।

পার্শ্বের চিত্রটির উপর ট্রেসিং পেপার বসাইয়া চিত্রটির প্রতিলিপি অঙ্কন কর। প্রতিলিপিটিকে মূল চিত্রের o বিন্দুতে কাঁটা কম্পাসের কাঁটা দিয়া চাপিয়া ধর এবং প্রতিলিপিটিকে মূল চিত্রের উপর ঘুরাইতে আরম্ভ কর।

চিত্র নং—34

লক্ষ্য কর, 90° আবর্তন করিলে প্রতিলিপিটি মূল চিত্রের সহিত মিলিয়া যাইবে অর্থাৎ 90° কোণে ঘুরাইলে চিত্রটির ঘূর্ণন প্রতিসাম্য পরিলক্ষিত হইবে। প্রতিলিপিটিকে 90° কোণে ঘুরাইবার পর, 180°, 270° কোণে ঘুরাইলে আরও দুইবার ঘূর্ণন প্রতিসাম্য দেখিতে পাইবে এবং 360° কোণে ঘুরাইলে প্রতিলিপিটি প্রথম অবস্থায় ফিরিয়া আসিবে। সুতরাং একবার পূর্ণ আবর্তনে চিত্রটিকে 4 বার একই অবস্থানে স্থানান্তরিত হইতে দেখা যায়। অতএব চিত্রটির ঘূর্ণন প্রতিসাম্য অঙ্ক 4।

কোন জ্যামিতিক আকৃতিকে একবার পূর্ণ আবর্তনে যতবার স্থানান্তরিত হইতে দেখা যায়, সেই সংখ্যাকে আকৃতির ঘূর্ণন প্রতিসাম্য অঙ্ক বলে।

চিত্রটিকে প্রতিসাম্য কেন্দ্র o-এর চারিদিকে 90° এবং উহার যে-কোন গুণিতক পরিমাণ কোণে (180°, 270° বা 360°) ঘুরানোর ফলে চিত্রটির ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য পরিলক্ষিত হয়। চিত্রটিকে যদি o কেন্দ্রের চারিদিকে – 90° এবং উহার যে-কোন গুণিতক পরিমাণ কোণে (– 180°, – 270° বা – 360°) ঘুরান যায়, তাহা হইলেও চিত্রটির ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য অক্ষুণ্ণ থাকে। সুতরাং চিত্রটিকে o কেন্দ্র বরাবর ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অভিমুখে 90° বা তাহার গুণিতক পরিমাণ কোণে ঘুরাইলে চিত্রটির ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য পরিলক্ষিত হইতেছে। অতএব, 90° (ধনাত্মক ও ঋণাত্মক) বা তাহার গুণিতক যে-কোনো পরিমাণ কোণ হইতেছে ঘূর্ণন প্রতিসাম্য কোণ।

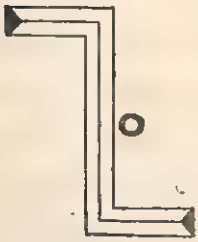
ক্ষেত্র বরাবর যে বিশিষ্ট কোণে ঘূর্ণনের ফলে চিত্র বিশেষের প্রতিসাম্য পরিলক্ষিত হয়, তাহাকে ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য কোণ বলে।

চিত্র নং —35

পার্শ্বের চিত্রটি লক্ষ্য কর। চিত্রটির প্রতিলিপি অঙ্কন করিয়া উহাকে o কেন্দ্র বরাবর 60° বা – 60° কোণে (60°, – 60°-এর গুণিতক পরিমাণ কোণে) আবর্তন করাইলে ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য পরিলক্ষিত হইবে। একবার পূর্ণ আবর্তনে বা 360° আবর্তনে চিত্রটি ছয়বার রূপান্তরিত হইবে। সুতরাং চিত্রটির ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য অঙ্ক 6 এবং ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য কোণ 60°।

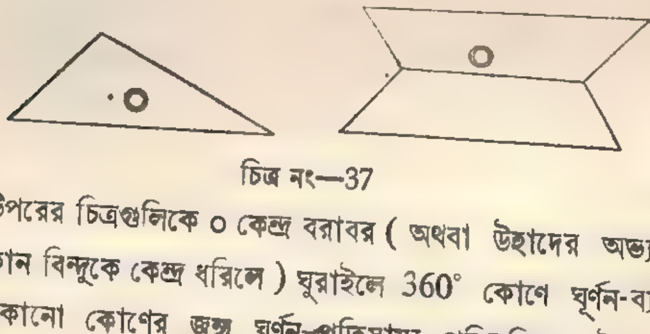
পরের পৃষ্ঠার চিত্রটিকে o কেন্দ্র বরাবর 180° কোণে ঘুরাইলে

একই চিত্র পাওয়া যাইবে। অতএব পূর্ণ আবর্তনে বা 360° আবর্তনে চিত্রটি 2 বার রূপান্তরিত হইবে। সুতরাং চিত্রটির ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য অঙ্ক 2 এবং ঘূর্ণন প্রতিসাম্য কোণ 180°।



চিত্র নং—34

কোন চিত্রকে কেন্দ্র বরাবর 180° কোণে ঘুরাইলে যদি একই চিত্র পাওয়া যায় অর্থাৎ চিত্রটির ঘূর্ণন প্রতিসাম্য পরিলক্ষিত হয়, তবে চিত্রের ঐরূপ প্রতিসাম্যকে বিন্দু প্রতিসাম্য (Point Symmetry) বলে। যে সব চিত্রের বিন্দু প্রতিসাম্য পরিলক্ষিত হয়, তাহাদের ঘূর্ণন প্রতিসাম্য অঙ্ক 2।



চিত্র নং—37

উপরের চিত্রগুলিকে o কেন্দ্র বরাবর (অথবা উহাদের অভ্যন্তরস্থ যে-কোন বিন্দুকে কেন্দ্র ধরিলে) ঘুরাইলে 360° কোণে ঘূর্ণন-ব্যতীত অন্য কোনো কোণের জন্য ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য পরিলক্ষিত হইবে না। সাধারণভাবে ঐ সব চিত্রের ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য ধর্ম নাই বলিয়া ধরা হয়। উহাদের ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য অঙ্ক এক।

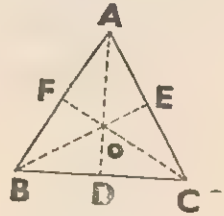
কয়েকটি জ্যামিতিক চিত্রের ঘূর্ণন প্রতিসাম্য :

তোমরা ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য সম্বন্ধে অনেক কথাই জানিতে পারিয়াছ। এবার কয়েকটি জ্যামিতিক চিত্রের ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য সম্বন্ধে আলোচনা করিব।

সমবাহু ত্রিভুজ (Equilateral Triangle)

চিত্রে, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। ইহার $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ও $\overline{AC}$ বাহু তিনটি পরস্পর সমান এবং $\angle ABC$, $\angle ACB$ এবং $\angle BAC$ কোণ তিনটিও পরস্পর সমান এবং প্রত্যেক কোণের পরিমাণ $60°$।

$\overline{BC}$, $\overline{AC}$ ও $\overline{AB}$ বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F লও। D, E এবং F বিন্দুতে $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ এবং $\overline{CF}$ লম্ব অঙ্কন কর। এই তিনটি লম্ব O বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিল। এখন O বিন্দু হইল ABC সমবাহু ত্রিভুজের ঘূর্ণন কেন্দ্র। চাঁদার সাহায্যে মাপিয়া দেখ $\angle AOB$, $\angle BOC$ এবং $\angle AOC$—এই কোণ তিনটি পরস্পর সমান এবং প্রত্যেক কোণের পরিমাণ $120°$।

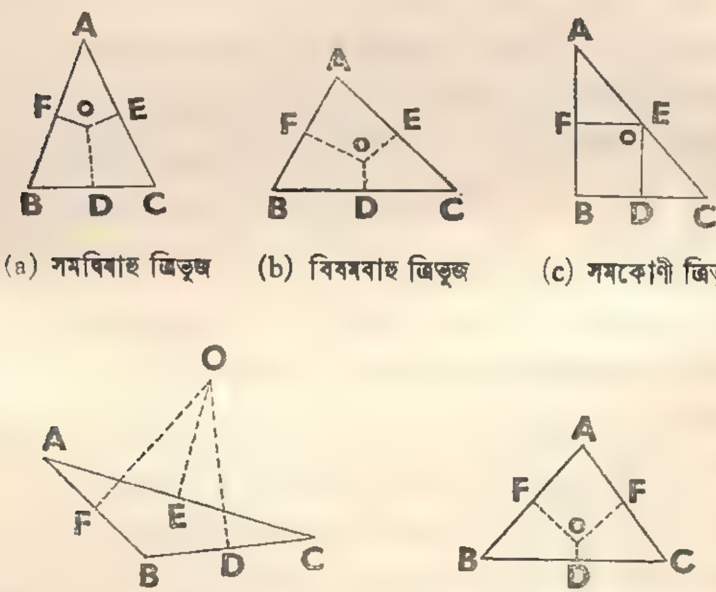


চিত্র নং—39

চিত্রে প্রদর্শিত সমবাহু ত্রিভুজ ABC-এর উপর ট্রেসিং পেপার বসাইয়া ত্রিভুজটির একত্র প্রতিলিপি অঙ্কন কর। তারপর ঐ প্রতিলিপিটিকে মূল চিত্রের উপর রাখিয়া মূল চিত্রের O বিন্দুতে পিন ফুটাইয়া প্রতিলিপিটিকে চাপিয়া ধর। প্রতিলিপিটিকে O কেন্দ্রের চারিদিকে আস্তে আস্তে ঘুরাইতে আরম্ভ কর। দেখিবে, প্রতিলিপিটি প্রতি $120°$ কোণ আবর্তন করিলে মূল চিত্রের সহিত মিলিয়া যায়, অর্থাৎ $120°$ আবর্তনে সমবাহু ত্রিভুজটির ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য পরিলক্ষিত হয়। সমবাহু ত্রিভুজটির উপর প্রতিলিপিটিকে ঘূর্ণন কেন্দ্র বরাবর $240°$ এবং $360°$ কোণে আবর্তন করাইলেও ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য অক্ষুণ্ণ থাকে। আবার প্রতিলিপিটিকে

-120°, -240° এবং -360° কোণে আবর্তন করাইলেও ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য লক্ষিত হয়। এইভাবে প্রতিলিপিটিকে O কেন্দ্র বরাবর 120° (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) কোণে 3 বার ঘুরাইলে প্রতিলিপিটি প্রথম অবস্থানে ফিরিয়া আসে।

সুতরাং সমবাহু ত্রিভুজের ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য সংখ্যা 3 এবং ইহার ঘূর্ণন-প্রতিসাম্যের কোণ 120°। নিম্নের আরও কয়েকটি ত্রিভুজ লক্ষ্য কর :



(a) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ (b) বিষমবাহু ত্রিভুজ (c) সমকোণী ত্রিভুজ

(d) স্থূলকোণী ত্রিভুজ (e) সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ

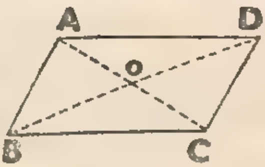
চিত্র নং—40

সমদ্বিবাহু, বিষমবাহু, সমকোণী, স্থূলকোণী, সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ পাঁচটির প্রত্যেকটিতে উহাদের BC, AC ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু

যথাক্রমে D, E ও F হইতে লম্ব টানিয়া উহাদের ছেদবিন্দু O বাহির কর। চাঁদার সাহায্যে মাপিয়া দেখ ∠DOF, ∠DOE এবং ∠EOF কোণ তিনটি পরস্পর অসমান। সুতরাং O কেন্দ্র বরাবর ত্রিভুজগুলিকে 360° কোণ ব্যতীত অন্য কোনো পরিমাণ কোণে আবর্তন করাইলে উহাদের ঘূর্ণন প্রতিসাম্য পরিলক্ষিত হইবে না। সুতরাং সমবাহু ত্রিভুজ ব্যতীত অন্য কোনো ত্রিভুজের ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য ধর্ম নাই।

সামান্তরিক (Parallelogram)

ABCD একটি সামান্তরিক। ইহার $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ বাহু পরস্পর সমান ও সমান্তরাল এবং $\overline{AD}$ ও $\overline{BC}$ বাহু পরস্পর সমান ও সমান্তরাল। AC ও BD যোগ কর। এই কর্ণ দুইটি পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন O বিন্দু হইল সামান্তরিকটির ঘূর্ণন প্রতিসাম্য কেন্দ্র।



চিত্র নং—41

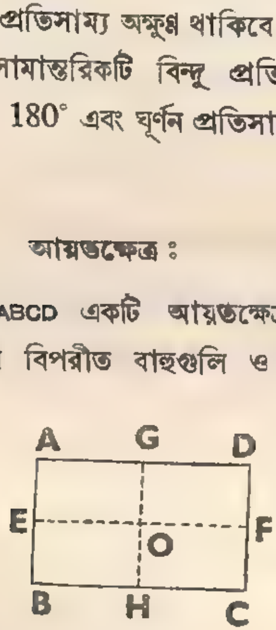
সামান্তরিকটির উপর ট্রেসিং পেপার বসাইয়া সামান্তরিকটির একটি প্রতিলিপি অঙ্কন কর। প্রতিলিপিটিকে মূল চিত্রের উপর রাখিয়া O বিন্দুতে পিন ফুটাইয়া প্রতিলিপিটিকে O বিন্দুর চারিদিকে ঘুরাইতে আরম্ভ কর। দেখিবে, প্রতিলিপিটিকে 180° কোণে ঘুরাইলে মূল চিত্রের সহিত মিলিয়া যাইবে কিন্তু প্রতিলিপির A, B, C ও D বিন্দু মূলচিত্রের C, D, A ও B বিন্দুর উপর পড়িবে। এইভাবে প্রতিলিপিটিকে O কেন্দ্র বরাবর ঘুরাইতে থাকিলে

সম্পূর্ণ একবার ঘুরিয়া আসিতে মূলচিত্রের সহিত প্রতিলিপিটির দুইবার ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য পরিলক্ষিত হইবে। প্রতিলিপিটিকে প্রতিসাম্য কেন্দ্র বরাবর 180° কোণে (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) বা তাহার গুণিতক যে কোন পরিমাণ কোণে ঘুরাইলে সামান্তরিকটির ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য অক্ষুণ্ণ থাকিবে।

সামান্তরিকটি বিন্দু প্রতিসম। অর্থাৎ উহার ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য কোণ 180° এবং ঘূর্ণন প্রতিসাম্য অঙ্ক 2।

আয়তক্ষেত্র :

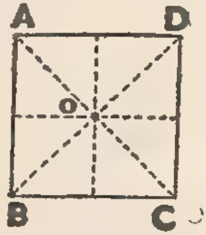
ABCD একটি আয়তক্ষেত্র। ইহাও একটি সামন্তরিক, কারণ ইহার বিপরীত বাহুগুলি ও কোণগুলি পরস্পর সমান কিন্তু ইহার প্রত্যেকটি কোণের পরিমাণ এক-সমকোণ। আয়তক্ষেত্রের রৈখিক প্রতিসাম্য ধর্ম বর্তমান। আয়তক্ষেত্রটির $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ বাহুর মধ্যবিন্দু E ও F-এর সংযোজক সরলরেখা $\overline{EF}$ এবং $\overline{AD}$ ও $\overline{BC}$ বাহুর মধ্যবিন্দু G ও H-এর সংযোজক সরলরেখা $\overline{GH}$ টান। EF ও GH পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিল। এই O বিন্দু হইল ABCD আয়তক্ষেত্রটির ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য কেন্দ্র। এখন O কেন্দ্র বরাবর আয়তক্ষেত্রটিকে 180° (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) কোণে ঘুরাইলে উহার ঘূর্ণন প্রতিসাম্য পরিলক্ষিত হইবে। আয়তক্ষেত্র বিন্দু-প্রতিসম। ইহার ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য কোণ 180° ও ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য অঙ্ক 2।



চিত্র নং—42

বর্গক্ষেত্র :

আয়তক্ষেত্রের চারিটি বাহু পরস্পর সমান হইলে উহা বর্গক্ষেত্রে পরিণত হয়। উহার কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য কেন্দ্র। এখন প্রতিসাম্য কেন্দ্র বরাবর বর্গক্ষেত্রটিকে 90° (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) কোণে বা তাহার গুণিতক যে-কোনো পরিমাণ কোণে ঘুরাইলে বর্গক্ষেত্রটির ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য পরিলক্ষিত হইবে। এইভাবে 90° কোণে চারবার আবর্তন করাইলে বর্গক্ষেত্রটির শীর্ষ-বিন্দুগুলি মূল অবস্থানে ফিরিয়া আসিবে। বর্গক্ষেত্রের ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য কোণ 90° এবং উহার ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য অঙ্ক 4।



চিত্র নং—43

দ্রষ্টব্য : বর্গক্ষেত্রের কর্ণ দুইটি পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে এবং প্রত্যেকটি কর্ণের দুই পার্শ্বের ত্রিভুজ দুইটি একটি অপরটির প্রতিসম। অতএব বর্গক্ষেত্রের কর্ণ দুইটি প্রতিসাম্যের অক্ষ। আবার, বর্গক্ষেত্রের বিপরীত বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে এবং বর্গক্ষেত্রটিকে চারিটি সর্বসম অংশে বিভক্ত করে; অতএব ইহারাও প্রতিসাম্যের অক্ষ এবং বর্গক্ষেত্রের রৈখিক প্রতিসাম্য ধর্ম বর্তমান।

রম্বস :

চিত্র নং—44

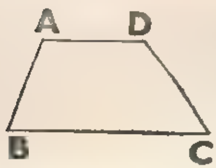
রম্বসের বিপরীত বাহুগুলি ও বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান। সুতরাং রম্বস একটি সামন্তরিক। বর্গক্ষেত্রের মত ইহার চারিটি বাহু পরস্পর সমান হইলেও, ইহার কোনো কোণ-ই সমকোণ নয়।

উহার কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু উহার ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য কেন্দ্র। কেন্দ্র বরাবর রম্বসটিকে 180° (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) কোণে দুইবার ঘুরাইলে রম্বসের শীর্ষবিন্দুগুলি পূর্ব অবস্থানে ফিরিয়া আসিবে। অতএব, রম্বস বিন্দু-প্রতিসম, উহার ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য কোণ 180° এবং উহার ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য অঙ্ক 2।

ট্রাপিজিয়ম :

ইহার একজোড়া বাহু সমান্তরাল কিন্তু আর এক জোড়া বাহু সমান্তরাল নয়।

ট্রাপিজিয়মের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুতে কর্ণদ্বয় সমান কোণ উৎপন্ন করে না। আবার ইহার বিপরীত বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরল-রেখা দুইটিও ছেদবিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করে না। অতএব, ট্রাপিজিয়মের নির্দিষ্ট ঘূর্ণন প্রতিসাম্য কেন্দ্র নাই এবং ইহার ঘূর্ণন প্রতিসাম্য ধর্ম নাই।



চিত্র নং—45

ট্রাপিজিয়মের মধ্যস্থিত যে-কোনো বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ট্রাপিজিয়মটিকে ঘুরাইলে 360° কোণ ব্যতীত অন্য কোনো কোণে ইহার শীর্ষবিন্দুগুলি পূর্ব অবস্থানে ফিরিরা আসিবে না এবং উহার ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য লক্ষিত হইবে না।

বৃত্ত :

বৃত্তের ব্যাস হইতেছে বৃত্তের প্রতিসাম্যের অক্ষ এবং বৃত্তের কেন্দ্রই বৃত্তের ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য কেন্দ্র।

বৃত্তটিকে কেন্দ্রের চারিদিকে যে-কোনো পরিমাণ কোণে এবং যে-কোনো অভিমুখে ঘুরাইলে পরিধিটি উহার পূর্ব অবস্থানের সহিত মিশিয়া যায়।

চিত্রে, বৃত্তটিকে o কেন্দ্রের চারিদিকে যে কোনও কোণে ঘুরান হইয়াছে এবং ইহাতে যে কোনও বিন্দু স্থানান্তরিত হইয়াছে, কিন্তু ঘূর্ণনের পরও বৃত্তের পরিধিটি উহার পূর্ব অবস্থানের সহিত মিশিয়া রহিয়াছে।

চিত্র নং—46

বৃত্তের প্রতিসাম্য অক্ষের সংখ্যা অসংখ্য, উহার ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য কোণের পরিমাণ অনির্দিষ্ট এবং ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য অক্ষ অনির্দিষ্ট।

অনুশীলনী

1. কোন বস্তু বা চিত্রের প্রতিসাম্য বলিতে কি বুঝ? প্রতিসাম্য অক্ষ কাহাকে বলে? চিত্র আঁকিয়া বুঝাইয়া দাও।

2. জ্যামিতিক আকৃতির ঘূর্ণন প্রতিসাম্য ও রৈখিক প্রতিসাম্য ধর্ম চিত্র আঁকিয়া বুঝাইয়া দাও।

3. বিন্দু প্রতিসম বলিতে কি বুঝ? কোন্ কোন্ চতুর্ভুজ বিন্দু প্রতিসম?

4. ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য অক্ষ বলিতে কি বুঝ? সমবাহু ত্রিভুজ ও রম্বসের ঘূর্ণন প্রতিসাম্য অক্ষ কত?

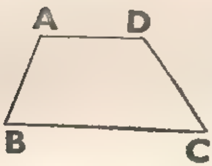
5. একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকিয়া উহার ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য কেন্দ্র নির্ণয় কর। উহার ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য কোণের পরিমাণ চাঁদার সাহায্যে মাপিয়া বাহির কর।

6. একটি সামান্তরিকের প্রতিসাম্য রেখা দুইটি পরস্পর লম্বভাবে ছেদ

উহার কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু উহার ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য কেন্দ্র। কেন্দ্র বরাবর রম্বসটিকে 180° (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) কোণে দুইবার ঘুরাইলে রম্বসের শীর্ষবিন্দুগুলি পূর্ব অবস্থানে ফিরিয়া আসিবে। অতএব, রম্বস বিন্দু-প্রতিসম, উহার ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য কোণ 180° এবং উহার ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য অঙ্ক 2।

ট্রাপিজিয়ম :

ইহার একজোড়া বাহু সমান্তরাল কিন্তু আর এক জোড়া বাহু সমান্তরাল নয়।



চিত্র নং—45

ট্রাপিজিয়মের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুতে কর্ণদ্বয় সমান কোণ উৎপন্ন করে না। আবার ইহার বিপরীত বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা দুইটিও ছেদবিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করে না। অতএব, ট্রাপিজিয়মের নির্দিষ্ট ঘূর্ণন প্রতিসাম্য কেন্দ্র নাই এবং ইহার ঘূর্ণন প্রতিসাম্য ধর্ম নাই।

ট্রাপিজিয়মের মধ্যস্থিত যে-কোনো বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ট্রাপিজিয়মটিকে ঘুরাইলে 360° কোণ ব্যতীত অন্য কোনো কোণে ইহার শীর্ষবিন্দুগুলি পূর্ব অবস্থানে ফিরিয়া আসিবে না এবং উহার ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য লক্ষিত হইবে না।

বৃত্ত :

বৃত্তের ব্যাস হইতেছে বৃত্তের প্রতিসাম্যের অক্ষ এবং বৃত্তের কেন্দ্রই বৃত্তের ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য কেন্দ্র।

বৃত্তটিকে কেন্দ্রের চারিদিকে যে-কোনো পরিমাণ কোণে এবং যে-কোনো অভিমুখে ঘুরাইলে পরিধিটি উহার পূর্ব অবস্থানের সহিত মিশিয়া যায়।

চিত্রে, বৃত্তটিকে O কেন্দ্রের চারিদিকে যে কোনও কোণে ঘুরান হইয়াছে এবং ইহাতে যে কোনও বিন্দু স্থানান্তরিত হইয়াছে, কিন্তু ঘূর্ণনের পরও বৃত্তের পরিধিটি উহার পূর্ব অবস্থানের সহিত মিশিয়া রহিয়াছে।

চিত্র নং—46

বৃত্তের প্রতিসাম্য অক্ষের সংখ্যা অসংখ্য, উহার ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য কোণের পরিমাণ অনির্দিষ্ট এবং ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য অঙ্ক অনির্দিষ্ট।

অনুশীলনী

1. কোন বস্তু বা চিত্রের প্রতিসাম্য বলিতে কি বুঝ ? প্রতিসাম্য অক্ষ কাহাকে বলে ? চিত্র আঁকিয়া বুঝাইয়া দাও।

2. জ্যামিতিক আকৃতির ঘূর্ণন প্রতিসাম্য ও রৈখিক প্রতিসাম্য ধর্ম চিত্র আঁকিয়া বুঝাইয়া দাও।

3. বিন্দু প্রতিসম বলিতে কি বুঝ ? কোন্ কোন্ চতুর্ভুজ বিন্দু প্রতিসম ?

4. ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য অঙ্ক বলিতে কি বুঝ ? সমবাহু ত্রিভুজ ও রম্বসের ঘূর্ণন প্রতিসাম্য অঙ্ক কত ?

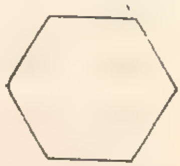
5. একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকিয়া উহার ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য কেন্দ্র নির্ণয় কর। উহার ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য কোণের পরিমাণ চাঁদার সাহায্যে মাপিয়া বাহির কর।

6. একটি সামান্তরিকের প্রতিসাম্য রেখা দুইটি পরস্পর লম্বভাবে ছেদ

করিয়াছে। উহার ঘূর্ণন-প্রতিসাম্য কোণ 90°। চিত্র আঁকিয়া দেখাও যে ইহা একটি বর্গক্ষেত্র।

7. নিম্নলিখিত জ্যামিতিক আকৃতিগুলির ঘূর্ণন প্রতিসাম্য কেন্দ্র ও ঘূর্ণন প্রতিসাম্য কোণ নির্ণয় কর :

চিত্র নং—47



চিত্র নং—48

চিত্র নং—49

তৃতীয় পরিচ্ছেদ

রূপান্তর সমূহের সংযোজন : সর্বসমতা

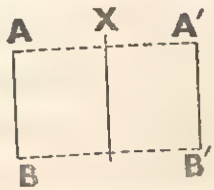
[Composition of transformations : Congruence]

রূপান্তর সমূহের সংযোজন :

তোমরা ষষ্ঠ শ্রেণীর জ্যামিতিতে প্রতিফলন ও তাহার বিভিন্ন ধর্মের কথা পড়িয়াছ। পূর্ব পরিচ্ছেদে চলন ও ঘূর্ণনের ধর্ম ও তাহার ফলে জ্যামিতিক চিত্রের নানা পরিবর্তনের কথা আলোচনা করা হইয়াছে।

প্রতিফলন, চলন ও ঘূর্ণন—এই তিন প্রকার রূপান্তরের ফলে জ্যামিতিক চিত্রের স্থানান্তকরণ ঘটে, কিন্তু ইহাতে জ্যামিতিক চিত্রের আকার বা আয়তনের পরিবর্তন ঘটে না।

মনে কর, x অক্ষের বামপার্শ্বে দুইটি বিন্দু A ও B দিয়া $\overline{AB}$ একটি রেখা টানা হইল। A বিন্দুর প্রতিবিম্ব A' এবং B বিন্দুর প্রতিবিম্ব B' হইলে A' ও B' বিন্দু দুইটি দিয়া $\overline{A'B'}$ একটি রেখা টানা যাইতে পারে। অতএব, AB রেখাটি প্রতিফলনের ফলে রূপান্তরিত হইয়া $\overline{A'B'}$ রেখায় পরিণত হইল, কিন্তু ইহাতে মূল চিত্রের আকার বা আয়তনের পরিবর্তন ঘটিল না। $\overline{A'B'}$ রেখা হইল মূল রেখা AB এর অবিকল প্রতিচ্ছবি।

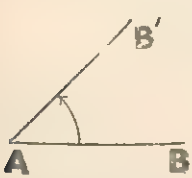


চিত্র নং—50

চিত্র নং—51

চলনের ফলে $\overline{AB}$ রেখা $\overline{A'B'}$ রূপ গ্রহণ করিল। ইহাতে $\overline{AB}$ রেখার স্থান পরিবর্তন ঘটিল, কিন্তু আকার বা আয়তনের কোনরূপ পরিবর্তন ঘটিল না।

চিত্রে দেখ $\overline{AB}$ রেখা A বিন্দুকে কেন্দ্র করিযা ঘূর্ণনের ফলে $\overline{AB'}$ রূপ গ্রহণ করিল। ইহাতে $\overline{AB}$ রেখার স্থান পরিবর্তত ঘটিয়াছে, কিন্তু তাহার আকার বা আয়তনের কোন পরিবর্তন ঘটে নাই।



চিত্র নং—52

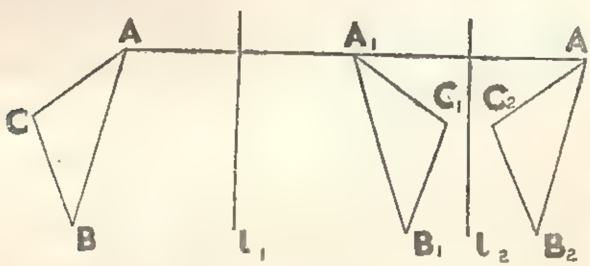
এইসব উদাহরণ হইতে তোমরা সহজে বুঝিতে পারিলে, প্রতি ক্ষেত্রে মূল জ্যামিতিক আকৃতির রূপান্তর

সংঘটিত হইয়াছে, কিন্তু মূল জ্যামিতিক আকৃতির সহিত রূপান্তরিত আকৃতির সম্পূর্ণ মিল রহিয়াছে।

কিন্তু যে সকল চিত্র তোমরা সাধারণতঃ দেখিতে পাও, সেগুলি হইতেছে একাধিক চলন, ঘূর্ণন, প্রতিফলন বা ঘূর্ণন ও চলন, চলন ও প্রতিফলন, প্রতিফলন ও ঘূর্ণনের মিলিত ফল। এইসব রূপান্তর একত্রে বা পরপর ঘটিয়া থাকে। সুতরাং একই প্রকার বা বিভিন্ন প্রকার রূপান্তর ঘটাইয়া তাহার মিলিত ফল নির্ণয় করাকে রূপান্তর সমূহের সংযোজন বলে।

একাধিক চলন, ঘূর্ণন ও প্রতিফলনের সাহায্যে জ্যামিতিক চিত্রের কি ভাবে বিভিন্ন ধরনের রূপান্তর ঘটে, তাহা নিম্নের আলোচনা হইতে তোমরা সহজে বুঝিতে পারিবে।

(1) দুই বা ততোধিক **সমান্তরাল সরলরেখায়** একাধিক **প্রতিফলনের সংযোজন :**



চিত্র নং—53

চিত্রে লক্ষ্য কর, ABC ত্রিভুজটিকে l_1 অক্ষ বরাবর প্রতিফলিত করিয়া $A_1B_1C_1$ ত্রিভুজ পাওয়া গিয়াছে। আবার $A_1B_1C_1$ ত্রিভুজটিকে l_1 অক্ষের সমান্তরাল l_2 অক্ষ বরাবর প্রতিফলিত করিয়া $A_2B_2C_2$ ত্রিভুজ পাওয়া গিয়াছে। তোমরা ট্রেসিং পেপারে

ABC ত্রিভুজ আঁকিয়া দুইবার ভাঁজ করিলে এইরূপ একই চিত্র পাইবে।

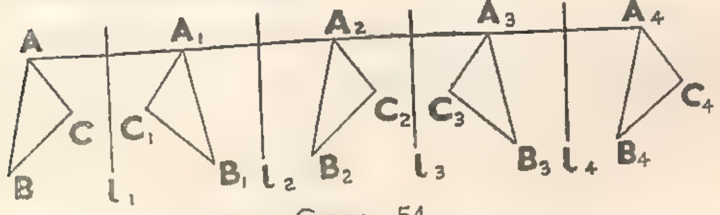
চিত্রে লক্ষ্য কর, $A_2B_2 \| AB$, $A_2C_2 \| AC$ এবং $B_2C_2 \| BC$। সুতরাং $A_2B_2C_2$ ত্রিভুজ হইতেছে ABC ত্রিভুজের চলন রূপান্তর।

A এবং A_2 বিন্দু যোগ কর। তাহা হইলে $\overline{AA_2}$ সরলরেখা হইতেছে A বিন্দুর চলনরেখা।

মাপিয়া দেখ, $l_1 l_2$ এর দূরত্ব $\overline{AA_2}$ রেখার দূরত্বের অর্ধেক। আবার দেখ, চলনরেখা $\overline{AA_2}$, প্রতিফলন অক্ষ l_1 এবং l_2 এর উপর লম্ব।

সুতরাং চলন হইতেছে সমান্তরাল সরলরেখায় পরপর দুইবার প্রতিফলনের সংযোজন রূপান্তর।

চলন দৈর্ঘ্য সমান্তরাল সরলরেখা দুইটির মধ্যস্থ দূরত্বের দ্বিগুণ।



চিত্র নং—54

চলনরেখা প্রতিফলন রেখার সমকোণ অবস্থান করে।

চিত্রে দেখ, ABC ত্রিভুজকে l_1 অক্ষ বরাবর প্রতিফলিত করিয়া $A_1B_1C_1$ চিত্র পাওয়া গিয়াছে। $A_1B_1C_1$ ত্রিভুজকে l_2 অক্ষ বরাবর প্রতিফলিত করায় যে $A_2B_2C_2$ ত্রিভুজ পাওয়া গিয়াছে, তাহা মূলচিত্র ABC ত্রিভুজের অনুরূপ। আবার, $A_2B_2C_2$ ত্রিভুজকে l_3 অক্ষ বরাবর প্রতিফলিত করায় যে $A_3B_3C_3$ ত্রিভুজ পাওয়া গিয়াছে, তাহা ABC ত্রিভুজ l_1 অক্ষ বরাবর প্রতিফলিত চিত্রের অনুরূপ। $A_3B_3C_3$ ত্রিভুজকে l_4 অক্ষ বরাবর প্রতিফলিত

করায় যে $A_4B_4C_4$ ত্রিভুজ পাওয়া গিয়াছে, তাহা চিত্র ABC ত্রিভুজের অনুরূপ।

সমান্তরাল সরলরেখায় তিন, পাঁচ বা যে-কোন অযুগ্ম সংখ্যকবার প্রতিফলনের সংযোজন রূপান্তর প্রতিফলন।

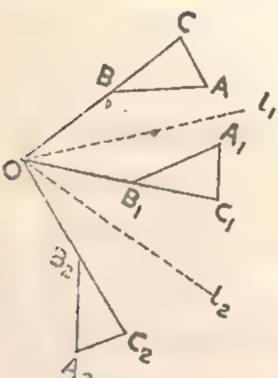
সমান্তরাল সরলরেখায় দুই, চার বা যে-কোনো যুগ্ম সংখ্যকবার প্রতিফলের সংযোজন রূপান্তর চলন।

(2) **চলন ও প্রতিফলনের সংযোজন :**

চিত্রে দেখে, $A_2B_2C_2$ ত্রিভুজ হইতেছে ABC ত্রিভুজের চলন রূপান্তর এবং $A_2B_2C_2$ ত্রিভুজের প্রতিফলন হইতেছে $A_1B_1C_1$ ত্রিভুজ। অতএব চলন ও প্রতিফলনের সংযোজনের ফলে ABC ত্রিভুজ $A_1B_1C_1$ ত্রিভুজে রূপান্তরিত হইয়াছে।

সুতরাং, চলন ও প্রতিফলনের সংযোজন রূপান্তর প্রতিফলন।

(3) **দুই বা ততোধিক পরস্পরছেদী সরলরেখায় একাধিক প্রতিফলনের সংযোজন :**



চিত্র নং—55

চিত্রে দেখ, l_1 অক্ষে ABC ত্রিভুজটি প্রতিফলিত হইয়া $A_1B_1C_1$ ত্রিভুজে রূপান্তরিত হইয়াছে। আবার $A_1B_1C_1$ ত্রিভুজটি l_2 অক্ষে প্রতিফলিত হইয়া $A_2B_2C_2$ ত্রিভুজে রূপান্তরিত হইয়াছে। l_1 এবং l_2 দুইটি অসমান্তরাল সরলরেখা এবং তাহারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখন $A_2B_2C_2$ ত্রিভুজ হইল l_1 ও l_2 অক্ষে ABC ত্রিভুজের দুইবার প্রতিফলনের ফল।

লক্ষ্য কর, l_1 এবং l_2 অক্ষে মূল ত্রিভুজ ABC-এর A, B এবং C বিন্দুর অবস্থানের পরিবর্তন ঘটিয়াছে, কিন্তু l_1 এবং l_2 সরলরেখার ছেদবিন্দু O যেইস্থানে ছিল সেই স্থানেই রহিয়াছে।

সুতরাং এইসব যৌগিক রূপান্তরে যে বিন্দুটি স্থির আছে, সেটি হইতেছে O বিন্দু। ABC ত্রিভুজকে l_1 এবং l_2 এই দুইটি পরস্পর-ছেদী সরলরেখা বরাবর প্রতিফলিত করিয়া যে $A_2B_2C_2$ ত্রিভুজ পাওয়া গিয়াছে, O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ABC ত্রিভুজের ঘূর্ণন রূপান্তর ঘটাইলেও সেই একই চিত্র $A_2B_2C_2$ ত্রিভুজ পাওয়া যাইত। সুতরাং $A_2B_2C_2$ ত্রিভুজ হইতেছে ABC ত্রিভুজের ঘূর্ণন রূপান্তর, O হইতেছে উহার ঘূর্ণনকেন্দ্র এবং ঘূর্ণন কোণের পরিমাণ $\angle COC_2$।

চাঁদার সাহায্যে মাপিয়া দেখ l_1 এবং l_2 পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করায় যে $\angle l_1 O l_2$ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে, তাহার পরিমাণ যত হইবে $\angle COC_2$ কোণের পরিমাণ তাহার দ্বিগুণ হইবে।

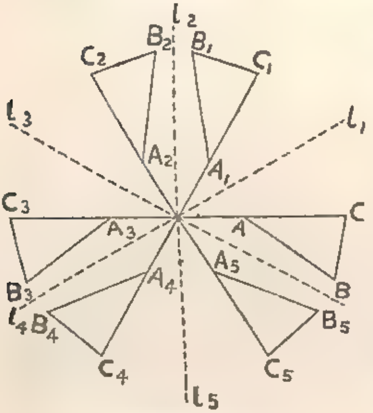
সুতরাং, দুইটি পরস্পর-ছেদী সরলরেখায় দুইবার প্রতিফলনের সংযোজন রূপান্তরের ফলকে ঘূর্ণন বলে।

প্রতিফলন রেখা দুইটির ছেদবিন্দুকে ঘূর্ণন কেন্দ্র বলে।

ঘূর্ণন কোণের পরিমাণ প্রতিফলন রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের দ্বিগুণ হয়।

56 নং চিত্রে দেখ, l_1, l_2 এবং l_3 তিনটি পরস্পর-ছেদী সরলরেখা O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। ABC ত্রিভুজ l_1 অক্ষ বরাবর প্রতিফলিত হইয়া $A_1B_1C_1$ ত্রিভুজে, $A_1B_1C_1$ ত্রিভুজ l_2 অক্ষ বরাবর প্রতিফলিত হইয়া $A_2B_2C_2$ ত্রিভুজের এবং $A_2B_2C_2$ ত্রিভুজ l_3 অক্ষ বরাবর প্রতিফলিত হইয়া $A_3B_3C_3$ ত্রিভুজে

রূপান্তরিত হইয়াছে। এইভাবে ABC ত্রিভুজের পাঁচটি প্রতিফলন জনিত রূপান্তর চিত্রে দেখান হইয়াছে।



চিত্র নং—56

ABC ত্রিভুজকে $l_1, l_2\ l_3$ প্রভৃতি পরস্পর-ছেদী সরল রেখা বরাবর প্রতিফলিত করিয়া যে $A_2B_2C_2$ ত্রিভুজ এবং $A_4\ B_4\ C_4$ ত্রিভুজ পাওয়া গিয়াছে, O-কে কেন্দ্র করিয়া ABC ত্রিভুজের ঘূর্ণন রূপান্তর ঘটাইলেও সেই একই চিত্র পাওয়া যাইত। আবার, $A_1B_1C_1$ ত্রিভুজ, $A_3B_3C_3$ ত্রিভুজ এবং $A_5B_5C_5$ ত্রিভুজ—এই তিনটি ত্রিভুজ হইতেছে ABC ত্রিভুজের প্রতিফলন জনিত রূপান্তর।

অতএব, দুই বা ততোধিক পরস্পর-ছেদী সরলরেখায় বিযুগ্ম সংখ্যক প্রতিফলনের সংযোজন রূপান্তর জনিত ফল প্রতিফলন।

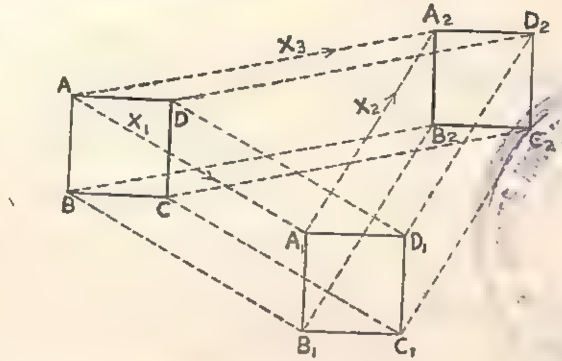
দুই বা ততোধিক পরস্পর-ছেদী সরল রেখায় যুগ্মসংখ্যক প্রতিফলনের সংযোজন রূপান্তর জনিত ফল ঘূর্ণন।

(4) ঘূর্ণন ও প্রতিফলনের সংযোজন :

চিত্রে দেখ $A_2B_2C_2$ ত্রিভুজ হইতেছে ABC ত্রিভুজের ঘূর্ণন-জনিত রূপান্তর এবং $A_2B_2C_2$ ত্রিভুজের প্রতিফলন হইতেছে $A_1B_1C_1$ ত্রিভুজ। সুতরাং ঘূর্ণন ও প্রতিফলনের সংযোজনে ABC ত্রিভুজের রূপান্তর সংযোজন হইতেছে $A_1B_1C_1$ ত্রিভুজ; আবার $A_1B_1C_1$ ত্রিভুজ হইতেছে l_1 অক্ষে ABC ত্রিভুজের

প্রতিফলন। সুতরাং এই প্রতিফলনকে ঘূর্ণন ও প্রতিফলনের সংযোজন বলা যাইতে পারে।

(5) একাধিক চলনের সংযোজন ঃ



চিত্র নং—57

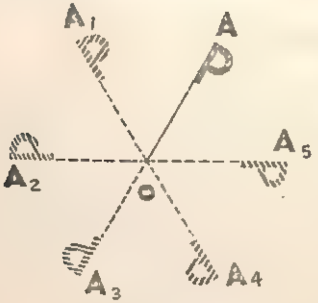
চিত্রে দেখ, ABCD চতুর্ভুজটি AA_1 চলন দৈর্ঘ্যে x_1 অভিমুখে চালিত হইয়া $A_1B_1C_1D_1$ চতুর্ভুজে রূপান্তর গ্রহণ করিয়াছে। $A_1B_1C_1D_1$ চতুর্ভুজটি A_1A_2 চলন দৈর্ঘ্যে x_2 অভিমুখে চালিত হইয়া $A_2B_2C_2D_2$ চতুর্ভুজরূপে রূপান্তর গ্রহণ করিয়াছেন। সুতরাং $A_2B_2C_2D_2$ চতুর্ভুজটিকে ABCD চতুর্ভুজের AA_2 চলন দৈর্ঘ্যে x_3 অভিমুখে চলন রূপান্তর বলা যাইতে পারে।

অতএব, একাধিক চলনের সংযোজনে রূপান্তর চলনই হইয়া থাকে।

(6) একাধিক ঘূর্ণনের সংযোজন ঃ

58নং চিত্রে দেখ, Oকে কেন্দ্র করিয়া P চিত্রটি 60° কোণে ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে, তাহার বিপরীত দিকে আবর্তিত হইয়া প্রথম

অবস্থান A বিন্দু হইতে A_1, A_2, A_3, A_4 এবং A_5 বিন্দুতে অবস্থান করিতেছে। স্পষ্টই দেখিতে পাইতেছ, একই অভিমুখে একাধিকবার



চিত্র নং—58

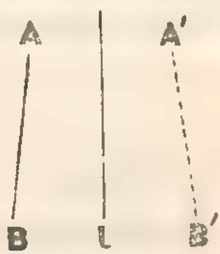
P চিত্রটির ঘূর্ণন রূপান্তরের সংযোজন একটি ঘূর্ণন। সুতরাং একাধিক ঘূর্ণনের সংযোজন রূপান্তর একটি ঘূর্ণন।

অতএব, একাধিক প্রতিফলন, চলন ও ঘূর্ণন ও তাহাদের সংযোজনে যে সকল রূপান্তরিত চিত্র পাওয়া যায়, ঐসব চিত্রের নূতন ধরনের কোন পরিবর্তন ঘটে না বা তাহাদের পরিমাণগত কোন পরিবর্তন দেখা যায় না। প্রতিফলন, চলন ও ঘূর্ণনের সংযোজন রূপান্তরের ফল হিসাবে প্রতিফলন, চলন বা ঘূর্ণনই পাওয়া যায়।

প্রতীকের সাহায্যে বিভিন্ন রূপান্তরের প্রকাশ

রূপান্তর সংযোজনের অনেক কথাই তোমরা জানিতে পারিলে। কোন চিত্র প্রতিফলন, চলন বা ঘূর্ণনের ফলে একটি রূপান্তরিত চিত্রে পরিবর্তিত হইলে, তাহা কিভাবে প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়, তাহা লক্ষ্য কর।

(1) **প্রতিফলনজনিত রূপান্তরকে প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ :**



চিত্র নং—59

(*a*) চিত্রে দেখ, A বিন্দু প্রতিফলিত হইয়া A′ বিন্দুতে, B বিন্দু প্রতিফলিত হইয়া B′ বিন্দুতে এবং $\overline{AB}$ রেখা

প্রতিফলিত হইয়া $\overline{A'B'}$ রেখায় রূপান্তরিত হইয়াছে। প্রতিফলন-জনিত রূপান্তরকে সাধারণত S অক্ষর দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

সুতরাং তোমরা লিখিতে পার, $S(A)=A'$, $S(B)=B'$ এবং $S(AB)=\overline{A'B'}$।

$S(A)=A'$ এর অর্থ, l অক্ষে A বিন্দুর প্রতিফলনজনিত রূপান্তর A'।

$S(B)=B'$ „ „ l অক্ষে B বিন্দুর প্রতিফলনজনিত রূপান্তর B'।

$S(\overline{AB})=\overline{A'B'}$ " " l অক্ষে AB রেখার প্রতিফলনজনিত রূপান্তর $\overline{A'B'}$।

(b) চিত্রে, l_1 অক্ষে A বিন্দুর প্রতিফলনজনিত রূপান্তর A' এবং l_2 অক্ষে A' এর প্রতিফলনজনিত রূপান্তর A''। প্রথম প্রতিফলনজনিত রূপান্তরকে S_1 দ্বারা প্রকাশ করিলে, দ্বিতীয় প্রতিফলনজনিত রূপান্তরকে- S_2 দ্বারা প্রকাশ করিতে হয়।

চিত্র নং—60

$\therefore \quad S_1(A)=A'$

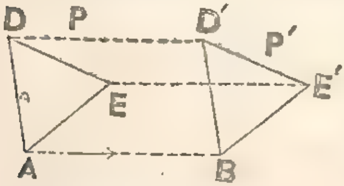
$S_2(A')=A''$

বা, $S_2S_1(A)=A''$ [যেহেতু $A'=S_1(A)$]

$S_2S_1(A)=A''$ এর অর্থ A এর S_1 রূপান্তরের S_2 রূপান্তর হইল A''।

(2) চলনজনিত রূপান্তরকে প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ :

(a) চিত্রে দেখ, A হইতে B অভিমুখে P চিত্রটির চলন রূপান্তর P′। P চিত্রে অবস্থিত। D ও E—এই দুইটি বিন্দুর চলন রূপান্তর D′ ও E′ বিন্দু। চিত্রটির A হইতে B অভিমুখে $\overline{AB}$ পরিমাণ চলনকে T দ্বারা প্রকাশ করিলে, লেখা যায়,



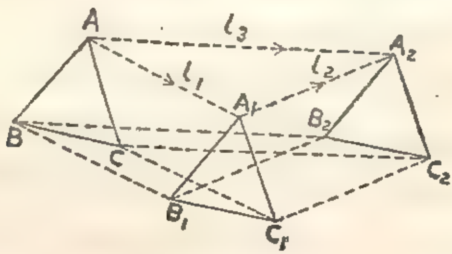
চিত্র নং—61

$$T(P) = P'$$

অনুরূপে, D ও E বিন্দুর চলন রূপান্তরকে লেখা যায়,

$$T(D) = D'$$
$$T(E) = E'$$

(a) চিত্রে দেখ, l_1 অভিমুখে AA_1 চলন দৈর্ঘ্য ABC ত্রিভুজের চলন রূপান্তর হইয়াছে $A_1B_1C_1$ ত্রিভুজ। আবার



চিত্র নং—62

l_2 অভিমুখে A_1A_2 চলন দৈর্ঘ্যে $A_1B_1C_1$ ত্রিভুজের চলন রূপান্তর হইয়াছে $A_2B_2C_2$ ত্রিভুজ। অতএব বলা যাইতে পারে,

l_3 অভিমুখে AA_2 চলন দৈর্ঘ্যে $A_2B_2C_2$ ত্রিভুজ হইল ABC ত্রিভুজের চলন রূপান্তর।

চলন দুইটিকে T_1 এবং T দ্বারা প্রকাশ করিলে লেখা যায়,

$T_1(A)=A_1 \qquad T_1(B)=B_1 \qquad T_1(C)=C_1$

$T_2(A_1)=A_2 \qquad T_2(B_1)=B_2 \qquad T_2(C_1)=C_2$

$\therefore\ T_2T_1(A)=A_2\ \therefore\ T_2T_1(B)=B\ \therefore T_2T_1(C)=C_2$

আবার, $T_1\ (\triangle ABC)=\triangle A_1B_1C_1$

$T_2(\triangle A_1B_1C_7)=\triangle A_2B_2C_2$

$\therefore\ T_2T_1(\triangle ABC)=\triangle A_2B_3C_2$, অর্থাৎ

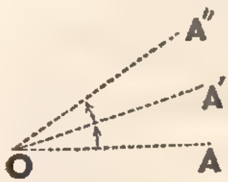
$\triangle ABC$-এর দুইটি চলনের সংযোজন রূপান্তর $\triangle A_2B_2C_2$

(3) ঘূর্ণন জনিত রূপান্তরকে প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ ঃ

(*a*) চিত্রে দেখ, O কেন্দ্রের চারিদিকে $\angle AOA'$ কোণে OA রেখার ঘূর্ণন জনিত রূপান্তর OA' রেখা। ঘূর্ণন জনিত রূপান্তরকে সাধারণতঃ R দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

চিত্র নং—63

$\therefore\ R(A)=A',\ R(\overline{OA})=\overline{OA'}$



চিত্র নং—64

(*b*) চিত্রে, O কেন্দ্রের চারিদিকে $\angle AOA'$ কোণে OA রেখার প্রথম ঘূর্ণন জনিত রূপান্তর $\overline{OA'}$ এবং পরবর্তী ঘূর্ণনজনিত রূপান্তর OA''। প্রথম ঘূর্ণনজনিত রূপান্তরকে R_1 এবং

দ্বিতীয় ঘূর্ণনজনিত রূপান্তরকে R_2 দ্বারা প্রকাশ করিলে লেখা যায়,—

$R_1(A) = A'$ আবার, $R_1(\overline{OA}) = \overline{OA'}$

$R_2(A') = A''$ $R_2(\overline{OA}) = \overline{OA''}$

$\therefore R_2R_1(A) = A''$ $R_2R_1(\overline{OA}) = \overline{OA''}$

সর্বসমতা :

চিত্র নং—65

উপরের চিত্রগুলি লক্ষ্য কর। প্রত্যেকটি চিত্রের আকার দেখিতে একই প্রকার, কিন্তু (a) চিত্রের আয়তনের সহিত (b) চিত্রের আয়তনের, এবং (a) বা (b) চিত্রের আয়তনের সহিত (c) চিত্রের আয়তনের পার্থক্য রহিয়াছে। কিন্তু (c) এবং (d) চিত্রের আকার ও আয়তন এক।

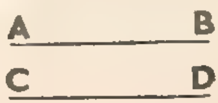
সুতরাং, দুইটি জ্যামিতিক চিত্র যদি আকার ও আয়তনে এক এবং অভিন্ন হয়, এবং একটির উপর আর একটিকে স্থাপন করিলে যদি সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া যায়, তবে ঐ চিত্র দুইটিকে সর্বসম বলে।

উপরের সংজ্ঞা হইতে একথা স্পষ্ট প্রতীয়মান হয় যে, সমান এবং সর্বসম এক কথা নয়। কোন জ্যামিতিক চিত্রের একটির সহিত আর একটি সমান বলিতে দুইটি মানের সমতাকে বুঝায়, কিন্তু একটির সহিত আর একটি সর্বসম বলিলে বুঝিতে হইবে যে, একটির উপর আর একটিকে ঠিকমত স্থাপন করিলে খাপে খাপে মিলিয়া যাইবে।

তোমরা প্রতিফলন, চলন ও ঘূর্ণনে দেখিয়াছ একটি জ্যামিতিক চিত্র আর একটির সহিত কি ভাবে মিলিয়া যায়। তোমরা আরও দেখিয়াছ, প্রতিফলন, চলন ও ঘূর্ণন প্রভৃতি যে-কোন প্রকার স্থানান্তরকরণে রেখাংশ ও কোণের মানের কোন পরিবর্তন হয় না। সুতরাং প্রতিফলন, চলন বা ঘূর্ণনের ফলে কোন জ্যামিতিক চিত্র যদি আর একটি জ্যামিতিক চিত্রের অবস্থানে আসে এবং প্রথম চিত্রটি যদি দ্বিতীয় চিত্রের সহিত একেবারে মিলিয়া যায়, তবে জ্যামিতিক চিত্র দুইটিকে সর্বসম বলা যায়।

(1) সরল রেখাংশের সর্বসমতা :

চিত্রে দেখ, $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ সরলরেখা দুইটির দৈর্ঘ্য সমান এবং উহাদের যে-কোন একটিকে আর একটির উপর স্থাপন করিলে মিলিয়া যায়। সুতরাং বলা যাইতে পারে, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$।

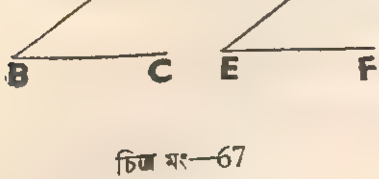


চিত্র নং—66

সুতরাং, দুইটি সরলরেখার দৈর্ঘ্য সমান হইলে, যদি একটিকে অপরটির উপর স্থাপন করা যায়, তবে সরলরেখা দুইটি মিলিয়া যায় ; ফলে সরলরেখা দুইটি সর্বসম হয়।

(2) কোণের সর্বসমতা :

চিত্রে, দেখ, $\angle ABC \cong \angle DEF$। $\angle ABC$ কোণকে যদি $\angle DEF$ কোণের উপর এমন ভাবে স্থাপন করা যায় যেন B বিন্দু E বিন্দুর উপর এবং $\overline{BC}$ বাহু যেন EF বাহুর উপর পড়ে, তবে, $\overline{BA}$ বাহু অবশ্যই $\overline{ED}$



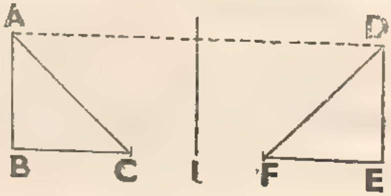
চিত্র নং—67

বাহুর উপর পড়িবে। অতএব, $\angle ABC$ কোণ সর্বতোভাবে $\angle DEF$ কোণের সহিত মিলিয়া যাইবে।

সুতরাং বলা যায়, যদি দুইটি কোণের পরিমাণ সমান হয়, তবে একটি কোণকে অপর কোণটির উপর স্থাপন করিলে কোণ দুইটি মিলিয়া যায়, ফলে কোণ দুইটি সর্বসম হয়।

(3) ত্রিভুজের সর্বসমতা :

চিত্রে দেখ, l-অক্ষে ABC ত্রিভুজের প্রতিফলনজনিত রূপান্তর DEF ত্রিভুজ। এখন l অক্ষ বরাবর ভাঁজ করিয়া দেখ, ABC



চিত্র নং—68

ত্রিভুজ ও DEF ত্রিভুজ দুইটি সব দিক দিয়া মিলিয়া যাইবে। ফলে, $\triangle ABC \cong \angle DEF$ হইবে।

ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইলে ABC ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণের সহিত DEF ত্রিভুজের অনুরূপ তিনটি বাহু ও তিনটি কোণের পরিমাণ সমান হইবে এবং ABC ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ, DEF ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণের সহিত হুবহু মিলিয়া যাইবে।

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ হইলে, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ এবং $\angle C \cong \angle F$ হইবে।

অতএব, দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একটির তিন বাহু ও তিন কোণ

যখন অন্যটির অনুরূপ তিন বাহু ও তিন কোণের প্রত্যেকটির সর্বসম হয়, তখন ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হয়।

অনেক সময় দুইটি ত্রিভুজ আয়তনে সমান হইলেও আকারে সমান নাও হইতে পারে। সে ক্ষেত্রে ত্রিভুজ দুইটিকে সমান বলিয়া লেখা হয়।

$\triangle PQR$ এবং $\triangle xyz$ দুইটির ক্ষেত্রফল সমান, কিন্তু ইহারা আকারে সমান নয়। অতএব এখানে লেখা হইবে $\triangle PQR = \triangle xyz$, কিন্তু $\triangle PQR \cong \triangle xyz$ লেখা হইবে না।

(4) চতুর্ভুজ বা বহুভুজের সর্বসমতা ঃ

দুইটি চতুর্ভুজ বা বহুভুজের মধ্যে যদি একটির বাহুগুলি ও

চিত্র নং—69

কোণগুলি যথাক্রমে অপরটির অনুরূপ বাহুগুলি ও কোণগুলির সহিত সর্বসম হয়, তবে দুইটি চতুর্ভুজ বা বহুভুজ সর্বসম হয়।

(5) বৃত্তের সর্বসমতা ঃ

দুইটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ দুইটির দৈর্ঘ্য সমান হইলেই বৃত্ত দুইটি সর্বসম হয়।

অনুশীলনী

1. রূপান্তরের সংযোজন কাহকে বলে ? চিত্র আঁকিয়া বুঝাইয়া দাও।

2. "সমান্তরাল সরলরেখায় দুইটি প্রতিফলনের সংযোজন, রূপান্তর ও চলন অভিন্ন"—চিত্রের সাহায্যে বুঝাইয়া দাও।

3. "দুইটি পরস্পর-ছেদী সরলরেখায়—দুইটি প্রতিফলনের সংযোজন রূপান্তর ঘূর্ণন"—চিত্র আঁকিয়া বুঝাইয়া দাও।

4. "দুইটি চলনের সংযোজন রূপান্তর চলন"—চিত্রের সাহায্যে বুঝাইয়া দাও।

5. জ্যামিতিক চিত্রের সর্বসমতা বলিতে কি বুঝ? দুইটি সরলরেখা, দুইটি কোণ ও দুইটি বৃত্ত কোন্ কোন্ শর্তে সর্বসম হয়?

6. A, B ও C তিনটি বিন্দু l অক্ষে প্রতিফলিত হইয়া D, E ও F রূপান্তর গ্রহণ করিয়াছে।

দেখাও যে $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

দ্বিতীয় অধ্যায়

অঙ্কন (সম্পাদ্য)

[Construction]

জ্যামিতির যে অংশে সমতলের উপর অঙ্কিত বিন্দু, রেখা, কোণ এবং ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ প্রভৃতি ক্ষেত্রের বিষয় আলোচিত হয়, তাহাকে সামতলিক জ্যামিতি (Plane Geometry) বলে।

জ্যামিতির যে অংশে নানাবিধ জ্যামিতিক অঙ্কন প্রণালী আলোচনা করিয়া অঙ্কিত চিত্রগুলির সাহায্যে জ্যামিতিক তথ্যের অবতারণা করা হয়, তাহাকে ব্যবহারিক জ্যামিতি (Practical Geometry) বলে।

বিশুদ্ধভাবে চিত্রাঙ্কনের জন্য (1) রুলার বা মাপনী (Scale), (2) কাঁটা-কম্পাস (Divider), (3) পেন্সিল-কম্পাস (Pencil

Compass), (4) দুইটি ত্রিকোণী (Set squares) ও (5) কোণ-মানযন্ত্র বা চাঁদা (Protractor) ব্যবহার করা হইয়া থাকে।

জ্যামিতির আলোচ্য বিষয়গুলিকে প্রতিজ্ঞা (Proposition) বলে।

যে প্রতিজ্ঞায় কোন জ্যামিতিক অঙ্কন সম্পাদন করিতে হয়, তাহাকে সম্পাদ্য (Problem) বলে। প্রত্যেক প্রতিজ্ঞার চারিটি অংশ; যথা—সাধারণ নির্বচন, বিশেষ নির্বচন, অঙ্কন ও প্রমাণ।

প্রতিজ্ঞার আলোচ্য বিষয়ের সাধারণ বর্ণনাকে বলে সাধারণ নির্বচন। সম্পাদ্যের সাধারণ নির্বচনের দুইটি অংশ থাকে—(ক) উপাত্ত ও (খ) করণীয়। সম্পাদ্যে যাহা দেওয়া থাকে, তাহাকে বলে উপাত্ত (Data) এবং যাহা অঙ্কন করিতে হয়, তাহাকে বলে করণীয় (Quaesita)। চিত্রের সাহায্যে প্রতিজ্ঞার আলোচ্য বিষয়ের বিশেষ বর্ণনাকে বলে বিশেষ নির্বচন। প্রতিজ্ঞার সত্যতা প্রতিপন্ন করার জন্য যে অঙ্কন কার্য করিতে হয়, তাহাকে অঙ্কন (Construction) বলে এবং প্রতিজ্ঞার সত্যতা বুঝাইয়া দিবার জন্য যে সকল যুক্তি-তর্কের অবতারণা করিতে হয়, তাহাকে বলে প্রমাণ (Proof)।

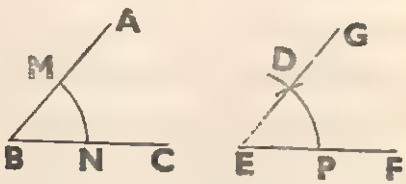
প্রথম পরিচ্ছেদ

প্রদত্ত কোণের সর্বসম অন্য একটি কোণ অঙ্কন

[Construction of an angle congruent to a given angle]

সম্পাদ্য 1

একটি প্রদত্ত কোণের সর্বসম অন্য একটি কোণ অঙ্কন করিতে হইবে।



চিত্র নং—70

∠ABC একটি প্রদত্ত কোণ। ইহার সহিত সর্বসম আর একটি কোণ অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : EF একটি সরলরেখা লও। B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে-কোন পরিমাণ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক, উহা যেন $\overline{AB}$-কে M এবং $\overline{BC}$-কে N বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন E-কে কেন্দ্র করিয়া পূর্বের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক, উহা যেন EF-কে P বিন্দুতে ছেদ করিল। P-কে কেন্দ্র করিয়া MN-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক, ইহা যেন পূর্বের চাপকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। E এবং D যোগ কর।

এখন, ∠DEF≅∠ABC হইল।

প্রমাণ : চাঁদার সাহায্যে মাপিয়া দেখ ∠ABC এবং ∠DEF সর্বসম হইয়াছে।

অনুশীলনী

1. চাঁদার সাহায্য লইয়া প্রথমে $\angle ABC$ কোণ আঁক, যাহার পরিমাণ 50°। এবার চাঁদার সাহায্য না লইয়া ঐ কোণের সমান আর একটি কোণ আঁক।

2. প্রদত্ত $\angle EFG$ একটি স্থূলকোণ। ইহার সমান আর একটি কোণ আঁক।

3. $\angle XYZ$ একটি প্রদত্ত কোণ (সূক্ষ্মকোণ)। ঐ কোণের দ্বিগুণ পরিমাণ আর একটি কোণ অঙ্কিত কর।

4. যে-কোন আকারের একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর। ঐ ত্রিভুজের সমান কোণ-বিশিষ্ট আর একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

প্রদত্ত অঙ্গ অবলম্বনে ত্রিভুজ অঙ্কন

[Construction of triangles with given parts]

ত্রিভুজ অঙ্কনে জ্ঞাতব্য তথ্য ঃ

ত্রিভুজ ছয় প্রকার। বাহুর দৈর্ঘ্যভেদে ত্রিভুজ তিন প্রকার—(1) সমবাহু, (2) সমদ্বিবাহু ও (3) বিষমবাহু ত্রিভুজ এবং কোণের পরিমাণ হিসাবে ত্রিভুজ তিন প্রকার—(1) সমকোণী, (2) স্থূলকোণী ও (3) সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ। প্রত্যেকটি ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ—তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ।

প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি 180° বা দুই সমকোণ।

সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি বাহু পরস্পর সমান ; সুতরাং তিনটি কোণও পরস্পর সমান এবং প্রত্যেক কোণের পরিমাণ 60°। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান। সুতরাং সমান সমান

বাহু দুইটি তৃতীয় বাহুর সহিত দুইটি সর্বসম কোণ উৎপন্ন করে। আবার বিষমবাহু ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ পরস্পর অসমান। সমকোণী ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ বা 90°, সুতরাং অপর দুইটি কোণের প্রত্যেকটি সূক্ষ্মকোণ এবং সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজটি হইতেছে ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহু। স্থূলকোণী ত্রিভুজের একটি কোণ স্থূলকোণ, সুতরাং অপর দুইটি কোণের প্রত্যেকটি সূক্ষ্মকোণ এবং স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের বিপরীত বাহু হইতেছে ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহু। সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের প্রত্যেকটি কোণই এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

ত্রিভুজের তিনটি বাহু, তিনটি কোণ ছাড়াও তিনটি মধ্যমা, তিনটি শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব—এই সমস্ত তথ্য, ত্রিভুজ অঙ্কনের প্রয়োজনীয় তথ্যরূপে গণ্য হইতে পারে। উপরি লিখিত তথ্যগুলির মধ্যে অন্ততঃ তিনটি তথ্য দেওয়া থাকিলে ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায়। কিন্তু ত্রিভুজ অঙ্কনের জন্য ত্রিভুজের মাত্র তিনটি কোণের পরিমাণ দেওয়া থাকিলে উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায় না।

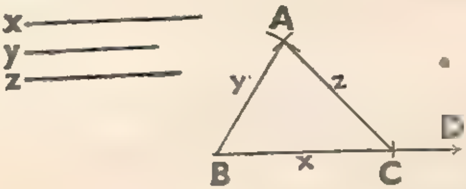
অনেক সময় ত্রিভুজ অঙ্কনের জন্য তিনটির কম তথ্য দেওয়া থাকে। সে-সব ক্ষেত্রে তিনটির কম তথ্যকে জ্যামিতিক জ্ঞানের সাহায্যে পূরণ করিয়া লইতে পারিলে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হয়। যথা—সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কনের জন্য উহার একটি বাহুর পরিমাণ দেওয়া থাকিলে উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায়, কারণ সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি বাহু পরস্পর সমান। সুতরাং এক্ষেত্রে একটি তথ্য দেওয়া থাকিলেও সমবাহু ত্রিভুজে অঙ্কনের প্রয়োজনীয় তথ্য জ্যামিতিক জ্ঞানের সাহায্যে পূরণ করিয়া লইয়া সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হয়। আবার, সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কনের জন্য যদি অতিভুজ এবং অপর একটি বাহুর পরিমাণ

দেওয়া থাকে, তবুও সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কনে কোন অসুবিধা ঘটে না, কারণ এক্ষেত্রে আর একটি তথ্য—সমকোণী ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ বা 90°—ইহা কল্পনায় পূরণ করিয়া লইয়া সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায়।

উল্লিখিত তথ্যগুলি ছাড়াও আরও বিভিন্ন তথ্যকে অবলম্বন করিয়া ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায়।

সম্পাদ্য 2

একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।



চিত্র—71

মনে কর, উদ্দিষ্ট ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য x, y ও z দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : BD একটি সরলরেখা লইয়া উহা হইতে x-এর সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও। B-কে কেন্দ্র করিয়া y-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর। আবার C-কে কেন্দ্র করিয়া z-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া BC-এর একই পার্শ্বে আর একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর। এই চাপ দুইটি যেন A বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিল।

তাহা হইলে $\triangle$ ABC হইল উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $\triangle ABC$ এর $\overline{BC} = x$,
$\overline{AB} = y$, এবং $\overline{AC} = z$

[দ্রষ্টব্য : (1) B-কে কেন্দ্র করিয়া y-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া এবং C-কে কেন্দ্র করিয়া z-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া BC এর এক পার্শ্বে দুইটি চাপ অঙ্কিত করায় উহারা A বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিয়াছে এবং প্রদত্ত শর্ত পূরণ করিয়া উদ্দিষ্ট ত্রিভুজটি অঙ্কিত হইয়াছে। কিন্তু ঐ দুইটি বৃত্তচাপ BC-এর অপর পার্শ্বে পরস্পরকে ছেদ করিলেও প্রদত্ত শর্ত পূরণ করিয়া আর একটি উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কিত হইত এবং ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান হইত।

(2) ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর না হইলে উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভবপর হয় না।

(*a*) যদি y ও z বাহুর সমষ্টি x বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইত, তাহা হইলে চাপ দুইটি পরস্পরকে ছেদ করিত না। সুতরাং উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভবপর হইত না।

আবার, (*b*) y ও z বাহুর সমষ্টি যদি x বাহুর সমান হইত তাহা হইলে চাপ দুইটি BC সরলরেখার উপর পরস্পরকে স্পর্শ করিত। এক্ষেত্রেও উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভবপর হইত না।]

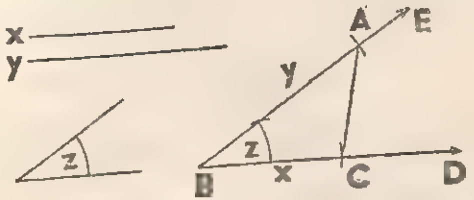
অনুশীলনী

1. 4, 5 ও 6 সে. মি. বাহু বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর।
2. 2·8, 3·7 ও 6·5 সে. মি. বাহু বিশিষ্ট ত্রিভুজটি আঁক।
   ত্রিভুজটি আঁকা সম্ভব হইবে কি? যদি আঁকা সম্ভব না হয়, তবে উপযুক্ত কারণ দেখাও।

3. 5·6, 3·7 এবং 1·5 সে. মি বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হইবে কি ?
4. 3, 4 ও 5 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁক। ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণটি মাপ এবং উহার পরিমাণ 90° হইল কিনা বল।

সম্পাদ্য 3

একটি ত্রিভুজের দুই বাহু ও তাহাদের অন্তর্গত কোণ দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।



চিত্র নং—72

মনে কর, উদ্দিষ্ট ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে x ও y এবং উহাদের অন্তর্গত কোণ $\angle z$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : $\overline{BD}$ একটি সরলরেখা লইয়া উহা হইতে x-এর সমান করিয়া $\overline{BC}$ অংশ কাটিয়া লও। BC এর B বিন্দুতে $\angle z$ কোণের সমান করিয়া $\angle CBE$ কোণ অঙ্কিত কর। $\overline{BE}$ হইতে y-এর সমান করিয়া $\overline{AB}$ অংশ কাটিয়া লও। $\overline{AC}$ যোগ কর।

তাহা হইলে $\triangle ABC$ হইল উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $\triangle ABC$ এর $\overline{BC} = x$,

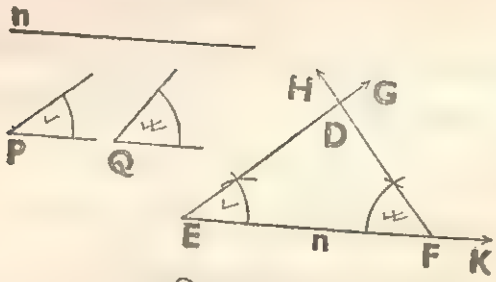
$\overline{AB} = y$ এবং $\angle ABC = \angle z$

অনুশীলনী

1. একটি ত্রিভুজের দুই বাহুর পরিমাণ যথাক্রমে 3 সে. মি. ও 4 সে. মি. এবং উহাদের অন্তর্গত কোণ 75° ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।
2. △ABC এর $\overline{BC}$=5 সে. মি., $\overline{AB}$=8 সে. মি. এবং ∠B=60° ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।
3. △XYZ-এর $\overline{YZ}$=4·5 সে. মি., XY=7·5 সে. মি. এবং ∠Y= 80° ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।
4. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু যথাক্রমে 4 সে. মি. ও 6 সে. মি. এবং উহাদের অন্তর্গত কোণ 60° ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। ত্রিভুজটির অপর দুইটি কোণের পরিমাণ চাঁদার সাহায্যে নির্ণয় কর।

সম্পাদ্য 4

একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং উহাদের সন্নিহিত সাধারণ বাহুটি দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।



চিত্র নং—73

মনে করে, একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে ∠P ও ∠Q কোণের সমান এবং n বাহু ঐ কোণ দুইটির সন্নিহিত সাধারণ বাহু। এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার একটি বাহু n বাহুর সমান হয় এবং তাহার সন্নিহিত কোণ দুইটি যথাক্রমে ∠P ও ∠Q এর সমান হয়।

অঙ্কন ঃ EK একটি সরলরেখা লও এবং এবং উহা হইতে n বাহুর সমান করিয়া EF অংশ কাটিয়া লও। এখন EF সরলরেখার E বিন্দুতে ∠P কোণের সমান করিয়া ∠FEG এবং F বিন্দুতে ∠Q কোণের সমান করিয়া ∠EFH আঁক। এখন EG ও FH পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হইল।

তাহা হইলে, △DEF হইল উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ ঃ অঙ্কন অনুসারে, △DEF এর ∠DEF = ∠P, ∠DFE = ∠Q এবং উহাদের সন্নিহিত সাধারণ বাহু EF = n.

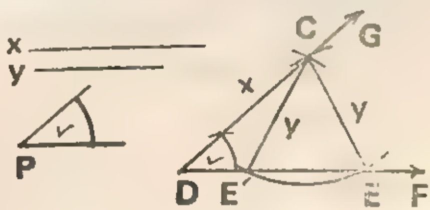
অনুশীলনী

ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর, যাহার দুইটি কোণ ও উহাদের সন্নিহিত সাধারণ বাহুর পরিমাণ ঃ

(1) 45°, 60°, 4·5 সে. মি. (2) 60°, 72°, 5·6 সে. মি. (3) 35°, 60°, 6·8 সে. মি. (4) 65°, 50°, 7 সে. মি.

সম্পাদ্য 5

একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং উহাদের একটি বাহুর বিপরীত কোণ দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।



চিত্র নং – 74

মনে কর, উদ্দিষ্ট ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে x ও y

এবং y বাহুর বিপরীত কোণ $\angle P$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : $\overrightarrow{DF}$ একটি সরলরেখা লও। $\overrightarrow{DF}$-এর D বিন্দুতে $\angle P$ কোণের সমান করিয়া $\angle FDG$ আঁক। $\overrightarrow{DG}$ হইতে x-এর সমান করিয়া $\overline{DC}$ অংশ কাটিয়া লও। C-কে কেন্দ্র করিয়া y-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক, উহা যেন $\overrightarrow{DG}$-কে E এবং E′ বিন্দুতে ছেদ করিল। $\overline{CE}$, $\overline{CE'}$ যোগ কর।

তাহা হইলে $\triangle CDE$ এবং $\triangle CDE'$ ত্রিভুজ দুইটি হইল উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

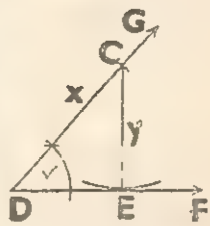
প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $\triangle CDE$-এর $\overline{CD} = x$, $\overline{CE} = y$ এবং $\overline{CE}$ বাহুর বিপরীত কোণ $\angle CDE = \angle P$

আবার, $\triangle CDE'$ এর $\overline{CD} = x$, $\overline{CE'} = y$ এবং $\overline{CE'}$ বাহুর বিপরীত কোণ $\angle CDE' = \angle P$।

দ্রষ্টব্য : এখানে প্রদত্ত অঙ্গগুলি লইয়া $\triangle CDE$ এবং $\triangle CDE'$— এই দুইটি অসমান ত্রিভুজ অঙ্কন করা হইয়াছে। যে স্থলে প্রদত্ত অঙ্গ-বিশিষ্ট দুইটি অসমান ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব, সেই স্থলকে দ্ব্যর্থক স্থল (Ambiguous Case) বলে।

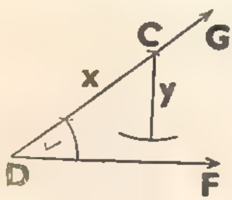
এখন পরীক্ষা করিলে দেখা যাইবে যে, প্রদত্ত অঙ্গগুলিকে লইয়া কোন্ কোন্ ক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হইবে এবং কোন্ কোন্ ক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হইবে না।

(1) প্রদত্ত $\angle P$ কোণটি যদি সূক্ষ্মকোণ হয় এবং y বাহুটি যদি C বিন্দু হইতে DF এর উপর লম্ব CE-এর সমান হয়, তাহা হইলে C-কে কেন্দ্র করিয়া y-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্তচাপ অঙ্কিত করিলে উহা DF-কে মাত্র E বিন্দুতে ছেদ করিবে। এক্ষেত্রে একমাত্র $\triangle CDE$ অঙ্কন করা সম্ভব হইবে।



চিত্র নং—74 (a)

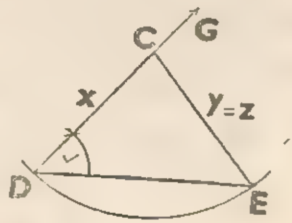
(2) কিন্তু y-এর পরিমাণ যদি C বিন্দু হইতে DF-এর উপর অঙ্কিত লম্ব CE অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তাহা হইলে y-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া C-কে কেন্দ্র করিয়া চাপ অঙ্কন করিলে উহা DF-কে কোন বিন্দুতে স্পর্শ করিবে না।



চিত্র নং—74 (b)

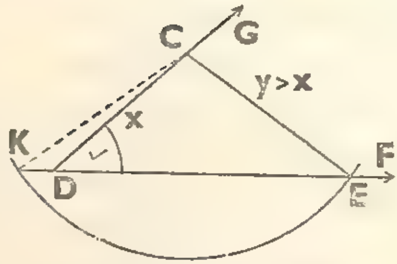
এক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হইবে না।

(3) যদি $y = x$ হয়, তাহা হইলে C হইতে DF-এর উপর অঙ্কিত চাপ DF-কে D এবং E বিন্দুতে ছেদ করিবে। এক্ষেত্রে একটিমাত্র $\triangle CDE$ অঙ্কন করা সম্ভব হবে।



চিত্র নং—74 (c)

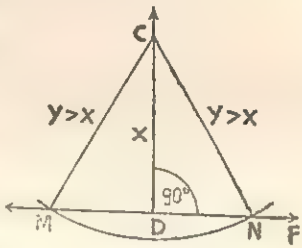
(4) যদি $y > x$ হয়, তবে C হইতে অঙ্কিত চাপ DF-কে E এবং এবং K বিন্দুতে ছেদ করিবে। এক্ষেত্রে একটিমাত্র উদ্দিষ্ট $\triangle CDE$ অঙ্কন করা সম্ভব হইবে।



চিত্র নং—64 (d)

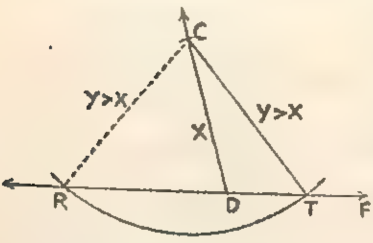
ΔCDK এর $\angle$CDK কোণটি প্রদত্ত $\angle$P কোণের সমান নয় বলিয়া ΔCDK উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে না।

(5) প্রদত্ত $\angle$P কোণটি যদি সমকোণ হইত এবং $y>x$ হইত, তাহা হইলে C হইতে DF-এর উপর অঙ্কিত চাপ M এবং N বিন্দ ছেদ করিত এবং এক্ষেত্রে ΔCDN এবং ΔCDM এই—দুইটি উদ্দিষ্ট সর্বসম ত্রিভুজ অঙ্কিত হইত।



চিত্র নং—75 (e)

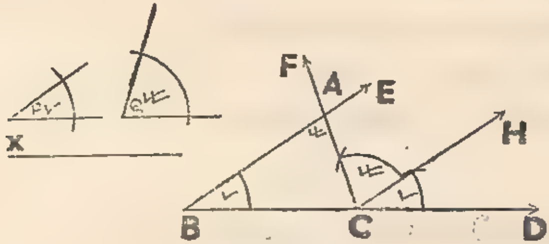
(6) যদি প্রদত্ত $\angle$P। কোণটি স্থূলকোণ হইত এবং $y>x$ হইত, তাহা হইলে C হইতে অঙ্কিত চাপ DF-কে R এবং T বিন্দুতে ছেদ করিত। এক্ষেত্রে একমাত্র উদ্দিষ্ট ΔCDT অঙ্কিত হইত। ΔCDR-এর $\angle$CDR কোণটি প্রদত্ত $\angle$P কোণের সমান নহে বলিয়া উহা উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে না।



চিত্র নং—74 (f)

সম্পাদ্য 6

একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং উহাদের একটি কোণের বিপরীত বাহু দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।



চিত্র নং—75

মনে কর, উদ্দিষ্ট ত্রিভুজের দুইটি কোণের পরিমাণ যথাক্রমে $\angle P$ ও $\angle Q$ এবং $\angle Q$ কোণের বিপরীত বাহু x দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : $\overrightarrow{BD}$ সরল রেখা লও এবং উহা হইতে x-এর সমান করিয়া $\overline{BC}$ অংশ কাটিয়া লও। $\overrightarrow{BD}$ সরলরেখার B ও C বিন্দুতে $\angle P$ কোণের সমান করিয়া $\angle CBE$ এবং $\angle DCH$ অঙ্কিত কর। আবার $\overrightarrow{CH}$ সরলরেখার C বিন্দুতে $\angle Q$ কোণের সমান করিয়া $\angle HCF$ অঙ্কিত কর। এখন $\overrightarrow{CF}$ এবং $\overrightarrow{BF}$ পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে $\triangle ABC$ হইল উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে $\angle ABC = \angle HCD$ এবং ইহারা অনুরূপ কোণ। $\therefore$ $\overline{AB} \parallel \overline{CH}$

$\therefore$ $\angle BAC =$ একান্তর $\angle ACH = \angle Q$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের $\angle ABC = \angle P$, $\angle BAC = \angle Q$

এবং $\angle BAC$ কোণের বিপরীত বাহু $\overline{BC} = x$

অনুশীলনী

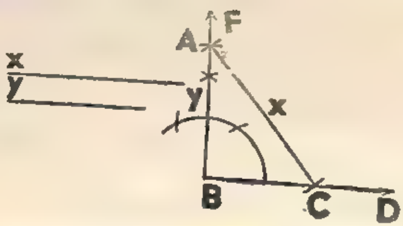
1. এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর যাহার দুইটি কোণ যথাক্রমে 35° ও 50° এবং প্রথম কোণের বিপরীত বাহু 5 সে. মি. হইবে।

2. এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর যাহার দুইটি কোণ 60° ও 65° এবং দ্বিতীয় কোণের বিপরীত বাহু 7·5 সে. মি. হইবে।

3. ABC ত্রিভুজের $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ এবং $\angle A$-এর বিপরীত বাহু $BC = 6$ সে. মি.। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

সম্পাদ্য 7

একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ এবং অপর একটি বাহু দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।



চিত্র নং—76

উদ্দিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ x এবং অপর একটি বাহু y দেওয়া আছে। সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

প্রথম প্রণালী :

অঙ্কন : $\overline{BD}$ একটি সরলরেখা লও এবং উহার B বিন্দুতে $\overline{BF}$ লম্ব আঁক। $\overline{BF}$ হইতে y-এর সমান করিয়া $\overline{BA}$ অংশ কাটিয়া লও। A কে কেন্দ্র করিয়া x-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক, উহা যেন $\overline{BD}$-কে C বিন্দুতে ছেদ করে। এখন $\overline{AC}$ যোগ কর।

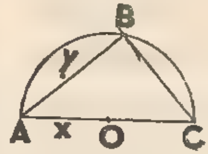
তাহা হইলে, $\triangle$ ABC হইল উদ্দিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ।

প্রমাণঃ অঙ্কন অনুসারে, ABC ত্রিভূজের $\angle ABC =$ এক সমকোণ।

অতিভুজ $\overline{AC} = x$ এবং $\overline{AB} = y$.

দ্বিতীয় প্রণালীঃ

অঙ্কনঃ x-এর সমান করিয়া $\overline{AC}$ সরলরেখা টান। $\overline{AC}$-কে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। O-কে কেন্দ্র করিয়া OA পরিমাণ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন কর। Aকে কেন্দ্র করিয়া y-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক, উহা যেন অর্ধ-পরিধিকে B বিন্দুতে ছেদ করে। $\overline{AB}$ এবং $\overline{BC}$ যোগ কর।



চিত্র নং—76 (a)

তাহা হইলে, $\triangle$ ABC হইল উদ্দিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ।

প্রমাণঃ ABC ত্রিভুজের $\angle ABC = 1$ সমকোণ,

$\overline{AC} = x$ এবং $\overline{AB} = y$.

অনুশীলনী

সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর যাহার অতিভুজ এবং অপর এক বাহুর পরিমাণ যথাক্রমেঃ

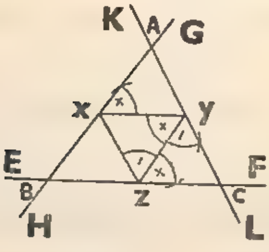
(1) 5 সে. মি., 3 সে. মি. (2) 6·5 সে. মি., 4 সে. মি.

(3) 7 সে. মি., 4·5 সে. মি. (4) 8 সে. মি, 5·5 সে. মি.

বিবিধ ত্রিভুজ অঙ্কন

1. (1) কোন ত্রিভুজের তিন বাহুর মধ্যবিন্দু দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে। [S. F. 1957]

মনে কর, উদ্দিষ্ট ত্রিভুজের তিনটি বাহুর মধ্যবিন্দু x, y ও z দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।



চিত্র নং—77

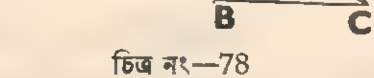
অঙ্কন : $\overline{xy}$, $\overline{yz}$ ও $\overline{zx}$ যোগ কর। z বিন্দুতে $\overline{xy} \parallel$ EF, y বিন্দুতে $\overline{xz} \parallel$ KL, এবং x বিন্দুতে $\overline{yz} \parallel$ GH টান।

এখন KL ও GH, A বিন্দুতে ; EF ও GH, B বিন্দুতে এবং KL ও EF, C বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, $\triangle$ABC হইল উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

(2) একটি ত্রিভুজের এক বাহু এবং অপর দুই বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা দুইটি দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[S. F. 1959]



চিত্র নং—78

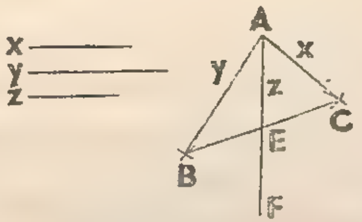
মনে কর, উদ্দিষ্ট ত্রিভুজের একটি বাহু x এবং অপর দুইটি বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা y ও z দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : x-এর সমান করিয়া BC সরলরেখা টান। B-কে কেন্দ্র করিয়া $\frac{2}{3}y$ এবং C-কে কেন্দ্র করিয়া $\frac{2}{3}z$-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ আঁক, উহারা যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল। BO-কে BE পর্যন্ত এবং CO-কে CF পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত কর যেন BE = y এবং CF = z হয়। BF এবং CE যোগ করিয়া উহাদিগকে বর্ধিত কর, যেন উহারা A বিন্দুতে মিলিত হয়।

তাহা হইলে, ABC হইল উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

(3) একটি ত্রিভুজের দুইবাহু এবং তদন্তর্গত কোণ হইতে অঙ্কিত মধ্যমা দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[S. F. 1956]



চিত্র নং—79

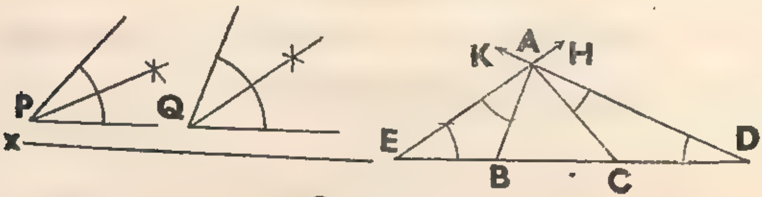
মনে কর, উদ্দিষ্ট ত্রিভুজের দুইটি বাহু x ও y এবং উহাদের অন্তর্গত কোণ হইতে অঙ্কিত মধ্যমা z দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : z-এর সমান করিয়া AE একটি সরলরেখা লও। AE-কে F পর্যন্ত এমন ভাবে বর্ধিত কর যেন AE = EF হয়। A ও F-কে কেন্দ্র করিয়া, যথাক্রমে x ও y-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ আঁক, ইহারা যেন C বিন্দুতে ছেদ করিল। CE যোগ

করিয়া উহাকে B পর্যন্ত এমন ভাবে বর্ধিত কর যেন CE = EB হয়। $\overline{AB}$ এবং $\overline{AC}$ যোগ কর। তাহা হইলে, $\triangle ABC$ হইল উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

(4) একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও পরিসীমা দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[C. U. 1948. S. F. 1956]



চিত্র নং—80

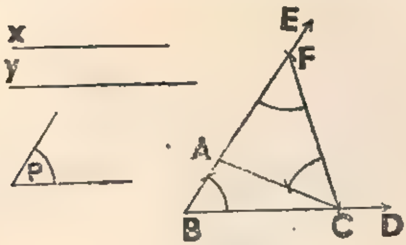
মনে কর, উদ্দিষ্ট ত্রিভুজের দুইটি কোণের পরিমাণ $\angle P$ ও $\angle Q$ দেওয়া আছে এবং উহার পরিসীমার দৈর্ঘ্য x দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : x-এর সমান করিয়া ED একটি সরলরেখা লও। $\overline{ED}$ সরলরেখার E বিন্দুতে $\frac{1}{2}\angle Q$ কোণের সমান করিয়া $\angle DEH$ এবং D বিন্দুতে $\frac{1}{2}\angle P$ কোণের সমান করিয়া $\angle EDK$ অঙ্কিত কর। $\overrightarrow{EH}$ এবং $\overrightarrow{DK}$ পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করিল। $\overline{EA}$ সরলরেখার A বিন্দুতে $\frac{1}{2}\angle Q$ কোণের সমান করিয়া $\angle EAB$ এবং $\overline{DA}$ সরলরেখার A বিন্দুতে $\frac{1}{2}\angle P$ কোণের সমান করিয়া $\angle DAC$ কোণ অঙ্কিত কর। মনে কর, $\overline{AB}$ সরলরেখা এবং $\overline{AC}$ সরলরেখা $\overline{ED}$-কে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, $\triangle ABC$ হইল উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

(5) একটি ত্রিভুজের ভূমি, অপর দুই বাহুর সমষ্টি এবং ভূমি-সংলগ্ন একটি কোণ দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[S. F. 1964]



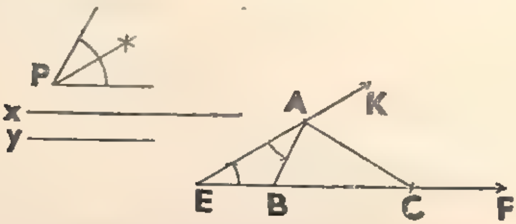
চিত্র নং—81

মনে কর, উদ্দিষ্ট ত্রিভুজের ভূমি x, অপর দুই বাহুর সমষ্টি y এবং ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $\angle P$ দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : $\overline{BD}$ একটি সরলরেখা লও এবং উহা হইতে x-এর সমান করিয়া $\overline{BC}$ অংশ কাটিয়া লও। $\overline{BC}$ সরলরেখার B বিন্দুতে $\angle P$ কোণের সমান করিয়া $\angle CBE$ অঙ্কিত কর। $\overline{BE}$ হইতে y-এর সমান করিয়া $\overline{BF}$ অংশ কাটিয়া লও। $\overline{FC}$ যোগ কর। $\overline{FC}$ সরলরেখার C বিন্দুতে $\angle BFC$ কোণের সমান করিয়া $\angle FCA$ কোণ অঙ্কিত কর। $\overline{CA}$ সরলরেখা $\overline{BF}$-কে A বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে $\triangle ABC$ হইল উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

(6) কোন ত্রিভুজের একটি কোণ. কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের সমষ্টি এবং ঐ কোণের বিপরীত বাহু দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

উদ্দিষ্ট ত্রিভুজের একটি কোণ ∠P, ঐ কোণ-সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের সমষ্টি x এবং ∠P কোণের বিপরীত বাহু y দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।



চিত্র নং—82

অঙ্কন : একটি সরলরেখা EF লও এবং উহা হইতে x-এর সমান করিয়া EC অংশ কাটিয়া লও। EC সরলরেখার E বিন্দুতে $\frac{1}{2}$ ∠P কোণের সমান করিয়া ∠CEK কোণ অঙ্কিত কর। C-কে কেন্দ্র করিয়া y-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর উহা যেন EK-কে A বিন্দুতে ছেদ করে। AC যোগ কর। EA সরলরেখার A বিন্দুতে $\frac{1}{2}$ ∠P কোণের সমান করিয়া ∠EAB কোণ অঙ্কিত কর, যেন AB সরলরেখা EC-কে B বিন্দুতে ছেদ করে।

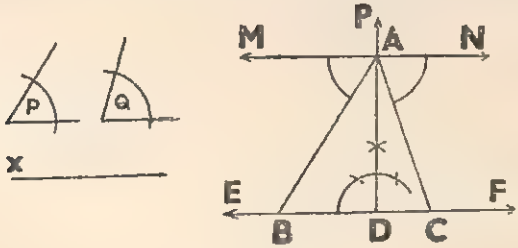
তাহা হইলে, △ ABC হইল উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

(7) শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য ও ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[S. F. Comp. '73]

উদ্দিষ্ট ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ x এবং ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয় যথাক্রমে ∠P ও ∠Q দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : $\overleftrightarrow{EF}$ একটি সরলরেখা লও এবং উহার উপর যে-কোন একটি বিন্দু D লও। D বিন্দুতে $\overrightarrow{DP}$ লম্ব অঙ্কিত কর এবং উহা



চিত্র নং—83

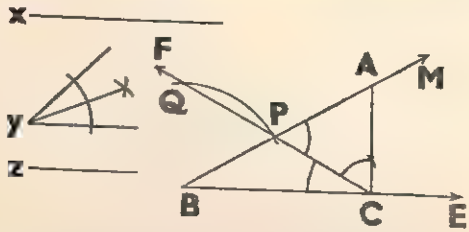
হইতে x-এর সমান করিয়া $\overline{DA}$ অংশ কাটিয়া লও। $\overline{DA}$ রেখার A বিন্দুতে $\overleftrightarrow{EF}$-এর সমান্তরাল করিয়া $\overleftrightarrow{MN}$ সরলরেখা টান। $\overleftrightarrow{MA}$ সরলরেখার A বিন্দুতে $\angle P$ কোণের সমান করিয়া $\angle MAB$ এবং $\overleftrightarrow{NA}$ সরলরেখার A বিন্দুতে $\angle Q$ কোণের সমান করিয়া $\angle NAC$ অঙ্কিত কর। মনে কর, $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$ সরলরেখা $\overleftrightarrow{EF}$-কে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে ΔABC হইল উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

(8) কোন ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর ও অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে। [C. U. 1931, 41]

মনে কর, উদ্দিষ্ট ত্রিভুজের ভূমির পরিমাণ x, ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর $\angle y$ এবং অপর দুই বাহুর অন্তর z দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন ঃ $\overrightarrow{BE}$ একটি সরলরেখা লও এবং উহা হইতে x-এর সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও। $\overline{BC}$ সরলরেখার C বিন্দুতে $\frac{1}{2}$ $\angle y$ কোণের সমান করিয়া $\angle BCF$ কোণ অঙ্কিত কর। B-কে কেন্দ্র করিয়া z-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর, উহা যেন



চিত্র নং—84

$\overrightarrow{CF}$-কে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। C-এর অধিকতর নিকটবর্তী P বিন্দুর সহিত B বিন্দু যোগ কর এবং উহাকে $\overrightarrow{BM}$ অভিমুখে বাড়াইয়া দাও। $\angle MPC$ কোণের সমান করিয়া $\overline{PC}$ সরলরেখার C বিন্দুতে $\angle PCA$ কোণ অঙ্কিত কর। এখন $\overline{CA}$ সরলরেখা $\overrightarrow{BM}$-কে A বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে $\triangle ABC$ হইল উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

অনুশীলনী

(1) এমন একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্বের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে।

(2) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের একটি ভূমিসংলগ্ন কোণ ও শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্বের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

(3) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি এবং উহার একটি বাহু ও শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্বের সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

(4) অতিভুজ ও অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে ; সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

(5) কোন ত্রিভুজের একটি কোণ, কোণসংলগ্ন বাহুদ্বয়ের সমষ্টি এবং ঐ কোণের বিপরীত বাহু দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি আঁক।

(6) কোন ত্রিভুজের ভূমি, ভূমিসংলগ্ন একটি কোণ এবং শীর্ষ হতে ভূমির উপর লম্ব দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি আঁক।

(7) ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমার দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

(8) ত্রিভুজের শীর্ষকোণ, দুইবাহুর সমষ্টি ও ভূমির দ্বিখণ্ডক মধ্যমা দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি আঁক।

তৃতীয় পরিচ্ছেদ

প্রদত্ত অঙ্গ অবলম্বনে চতুর্ভুজ অঙ্কন

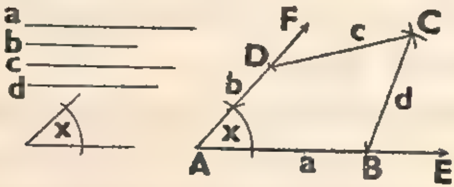
(Construction of quadrilateral with given parts)

চতুর্ভুজ অঙ্কনে জ্ঞাতব্য তথ্য ঃ

চতুর্ভুজের অঙ্গের সংখ্যা 8-টি—চারিটি বাহু ও চারিটি কোণ। এই 8-টি অঙ্গ ছাড়াও দুইটি কর্ণকে-চতুর্ভুজ অঙ্কনের প্রয়োজনীয় তথ্য বলিয়া গণ্য করা হয়। ত্রিভুজ অঙ্কনের জন্য তিনটি স্বতন্ত্র অঙ্গের প্রয়োজন হয় কিন্তু চতুর্ভুজ অঙ্কনের জন্য কমপক্ষে পাঁচটি অঙ্গের প্রয়োজন হয়।

সম্পাদ্য 8

কোন চতুর্ভুজের চারিটি বাহুর দৈর্ঘ্য এবং একটি কোণ দেওয়া আছে ; চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।



চিত্র নং—85

মনে কর, উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজের চারিটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b, c ও d দেওয়া আছে, এবং a ও b বাহু দুইটির অন্তর্গত কোণ $\angle x$ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : $\overrightarrow{AE}$ একটি সরলরেখা লও এবং উহা হইতে a-এর সমান করিয়া $\overline{AB}$ অংশ কাটিয়া লও। $\overline{AB}$ সরলরেখার A বিন্দুতে $\angle x$ সমান করিয়া $\angle BAF$ অঙ্কিত কর। $\overrightarrow{AF}$ হইতে b-এর সমান করিয়া $\overline{AD}$ অংশ কাটিয়া লও। D ও B-কে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে c এবং d-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর, উহারা যেন পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। $\overline{DC}$ এবং $\overline{BC}$ যোগ কর।

তাহা হইলে ABCD হইল উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, ABCD চতুর্ভুজের,

$\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$, $\overline{DC}=c$, $\overline{BC}=d$ এবং

$\angle BAD=\angle x$

অনুশীলনী

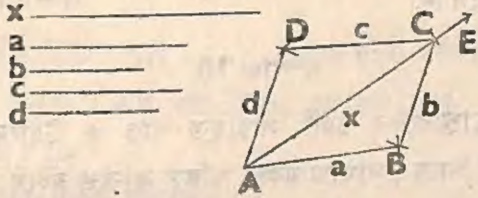
প্রদত্ত অঙ্গগুলি লইয়া চতুর্ভুজটি অঙ্কিত কর :

(1) $a=4$ সে.মি., $b=3{\cdot}5$ সে.মি., $c=6$ সে.মি., $d=4{\cdot}5$ সে.মি. এবং $\angle x=50^\circ$

(2) $a=3{\cdot}6$ সে.মি., $b=4{\cdot}5$ সে.মি., $c=4{\cdot}2$ সে.মি., $d=5$ সে.মি., এবং $\angle x=45^\circ$

সম্পাদ্য 9

কোন চতুর্ভুজের চারিটি বাহু এবং একটি কর্ণ দেওয়া আছে ; চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে ।



চিত্র নং—86

মনে কর, কোন চতুর্ভুজের চারিটি বাহুর দৈর্ঘ্য a, b, c ও d এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য x দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : $\overline{AE}$ একটি সরলরেখা লও এবং উহা হইতে x-এর সমান করিয়া $\overline{AC}$ অংশ কাটিয়া লও। A ও C-কে কেন্দ্র করিয়া এবং যথাক্রমে a ও b-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া $\overline{AC}$-এর একই পার্শ্বে দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর ; উহারা যেন B বিন্দুতে ছেদ করিল।

আবার A ও C-কে কেন্দ্র করিয়া এবং যথাক্রমে d ও c-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া $\overline{AC}$-এর যে পার্শ্বে B আছে, তাহার বিপরীত

পার্শ্বে দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর ; উহারা যেন D বিন্দুতে ছেদ করিল। $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ এবং $\overline{CB}$, $\overline{CD}$ যোগ কর।

তাহা হইলে, ABCD হইল উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

অনুশীলনী

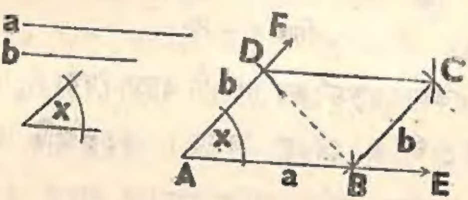
প্রদত্ত অঙ্গগুলি লইয়া চতুর্ভুজ অঙ্কন কর :

(1) $a=3\cdot6$ সে. মি., $b=3$ সে. মি., $c=4\cdot2$ সে. মি., $d=3\cdot5$ সে. মি. এবং কর্ণ $x=5\cdot5$ সে. মি।

(2) $a=3$ সে.মি., $b=3\cdot5$ সে.মি., $c=2\cdot6$ সে.মি., $d=2\cdot8$ সে.মি., এবং কর্ণ $x=4$ সে.মি.,

সম্পাদ্য 10

কোন সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু ও উহাদের অন্তর্ভূত কোণটি দেওয়া আছে ; সামান্তরিকটি অঙ্কিত করিতে হইবে।



চিত্র নং—87

মনে কর, কোন সামন্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু যথাক্রমে a ও b এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ $\angle x$ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : যে-কোন একটি সরলরেখা $\overrightarrow{AE}$ লও এবং উহা হইতে a-এর সমান করিয়া $\overline{AB}$ অংশ কাটিয়া লও। $\overline{AB}$ সরলরেখার A

বিন্দুতে $\angle x$ কোণের সমান করিয়া $\angle BAF$ আঁক। $\overrightarrow{AF}$ হইতে b-এর সমান করিয়া AD অংশ কাটিয়া লও। D ও B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে a ও b-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া $\overline{BD}$-এর যে পার্শ্বে A অবস্থিত, তাহার বিপরীত পার্শ্বে দুইটি বৃত্তচাপ আঁক ; উহারা যেন C বিন্দুতে ছেদ করিল। $\overline{BC}$ এবং $\overline{DC}$ যোগ কর।

তাহা হইলে ABCD হইল উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ : BD যোগ কর।

$\triangle ABD$ ও $\triangle BCD$-এর মধ্যে

$AD = BC = b$

$AB = CD = a$

BD উহাদের সাধারণ বাহু। $\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

$\therefore$ $\angle ABD = \angle BDC$ এবং উহারা একান্তর কোণ,

$\therefore$ $AB \parallel CD$

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

[দ্রষ্টব্য : প্রদত্ত $\angle x$ কোণটি সমকোণ হইলে, $\angle DAB =$ এক-সমকোণ হইত এবং ABCD চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র হইত।]

অনুশীলনী

1. সামান্তরিকটি অঙ্কিত কর, যাহার সন্নিহিত বাহুদ্বয় ও কোণের পরিমাণ :

(1) 6 সে.মি., 3 সে.মি., 45°

(2) 7·5 সে.মি., 4·5 সে.মি., 60°

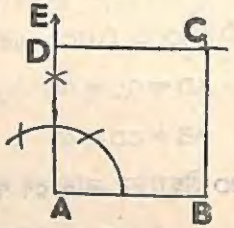
2. দুইটি সন্নিহিত বাহুর পরিমাণ 5 সে. মি., ও 3·5 সে. মি.। একটি আয়তক্ষেত্র আঁক।

সম্পাদ্য 11

একটি নির্দিষ্ট বাহুর উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

$\overline{AB}$ একটি নির্দিষ্ট বাহু। ইহার উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : $\overline{AB}$ সরলরেখার A বিন্দুতে $\overrightarrow{AE}$ লম্ব টান। $\overrightarrow{AE}$ হইতে $\overline{AB}$ এর সমান করিয়া $\overline{AD}$ অংশ কাটিয়া লও। B ও D-কে কেন্দ্র করিয়া AB-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর, উহারা যেন পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করিল।



$\overline{BC}$ ও $\overline{DC}$ যোগ কর।

তাহা হইলে, ABCD হইলে উদ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, ABCD চতুর্ভুজের চারিটি বাহু পরস্পর সমান। ∴ ABCD একটি সামান্তরিক।

আবার, ইহার $\angle DAB$ = এক সমকোণ।

∴ ABCD একটি বর্গক্ষেত্র।

অনুশীলনী

1. 3·5 সে.মি. বাহুর উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।
2. 4 সে.মি. বাহুর উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।
3. 6 সে.মি. কর্ণবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

[সংকেত—বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে দ্বিখণ্ডিত করে এবং কর্ণ দুইটির দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান।]